Московский государственный университет
Геодезии и картографии (МИИГАиК)
Кафедра высшей геодезии

Шануров Геннадий Анатольевич
Половнёв Олег Валентинович

Матрицы в геодезии.
Применение матриц в обработке и оценке точности результатов геодезических измерений и определений

Учебное пособие для студентов и аспирантов геодезических специальностей

Москва 2016 год

Оглавление

Введение

Математика есть фундаментальная основа геодезии вообще и высшей геодезии в частности. Геодезист в той или иной степени владеет некоторыми разделами математики. Чем выше эта степень, тем выше уровень геодезиста. Образ мыслей геодезиста как профессионала имеет, по крайней мере, две особенности. Он осознает, что безошибочных величин не бывает. Исключение составляют эталоны и величины, по определению являющиеся целочисленными. Другими словами, величина, полученная из измерений, содержит большую или меньшую ошибку. Например, расстояние между двумя пунктами можно измерить с ошибкой в один сантиметр, в один миллиметр, в одну десятую миллиметра. Ошибка всегда имеет место, даже если она равна тысячной доле миллиметра. Геодезист также осознает, что получить численное значение измеряемой величины необходимо, но этого недостаточно. Чтобы выполнить условие достаточности, следует сопроводить результат измерения оценкой точности этого результата. Следует вычислить среднюю квадратическую ошибку (погрешность) результата измерения, а также убедиться в том, что эта оценка соответствует допуску.

В учебном пособии описано практическое применение одного из разделов высшей математики - теории матриц - в обработке результатов геодезических измерений. Рассмотрено применение матриц в уравнивании результатов геодезических измерений и определений, а также в трансформировании координат пунктов геодезической сети. Особое внимание уделено оценке точности результатов определения координат пунктов геодезической сети, созданной с использованием системы глобального спутникового позиционирования типа GPS Navstar и/или ГЛОНАСС.

Авторы ставят перед собой две связанные задачи. Задача первая: дать студентам, приступающим к изучению теории матриц, возможность понять возможности применения матриц в геодезии на простых, но реальных примерах. Задача вторая: дать студентам и аспирантам, уже изучившим теорию матриц и приступающим к изучению теории математической обработки результатов геодезических измерений, возможность освежить в памяти основные положения теории матриц. Авторы изложили материал в определенной форме и в определенной последовательности, стремясь к удобству восприятия этого материала. Они исключили из текста математические доказательства высказываемых положений и утверждений. Взамен этого приведены ссылки на книги, в которых эти доказательства даны. Основой данного учебного пособия являются работы [1-3] Дроздова Н. Д. и работа [4] Неймана Ю. М. Именно в этих работах приведены доказательства всех утверждений, сделанных в данном учебном пособии.

Приступающий к изучению учебного пособия должен иметь подготовку в области высшей математики и, в частности, в области теории вероятностей, достаточную для того, чтобы оперировать такими, например, понятиями, как *интеграл, производная, дифференциал, случайная величина, математическое ожидание, дисперсия*. Кроме того, необходимо иметь подготовку в области геодезии, достаточную для того, чтобы на профессиональном уровне понимать, что означает *нивелирование, измерение угла* и *измерение расстояния*.

Профессор Шануров Г.А. благодарен своим учителям – профессору Дроздову Николаю Даниловичу и профессору Нейману Юрию Михайловичу за знания, полученные в студенческие годы в МИИГАиК.

1. Измеряемые величины и определяемые величины

При создании геодезической сети результатом является определение местоположения пунктов этой сети. Местоположение задают в форме координат и сопровождают оценкой точности этих координат.

Определение местоположения в форме координат имеет достоинства. Существует возможность использовать математический аппарат и компьютерные программы для обработки результатов. Но достоинств без проблем не бывает. Проблемы вытекают из того обстоятельства, что координатные оси в природе не существуют. Следовательно, понятие системы координат и понятие координат физически существующих пунктов - это понятие условное.

Полученные координаты сопровождают результатом оценки точности. Если речь идет об одиночном пункте, то оценка точности состоит в том, чтобы определить средние квадратические ошибки координат пункта. Если же речь идет о совокупности пунктов, то есть о пунктах геодезической сети, то исчерпывающую оценку точности дает ковариационная матрица. В разделах 7 и 8 даны принципы формирования этой матрицы.

В большинстве случаев в геодезии определяют не координаты пунктов, а разности координат пунктов. Определение именно координат пунктов на уровне точности в сантиметр - это процедура, требующая применения уникальной аппаратуры. Таковы лазерные импульсные дальномеры, применяемые в методе лазерной локации искусственных спутников Земли [6,7]. Определить же разности координат пунктов на уровне ошибки в сантиметр или даже миллиметр, то есть определить их *взаимное местоположение* можно с использованием приемников систем глобального позиционирования GPS Navstar и ГЛОНАСС, с использованием светодальномеров, теодолитов, нивелиров и электронных тахеометров [6,7].

Элементарную ситуацию, когда определяют относительное местоположение пунктов, то есть разность координат ΔX, ΔY, ΔZ этих пунктов, иллюстрирует рисунок 1.1.

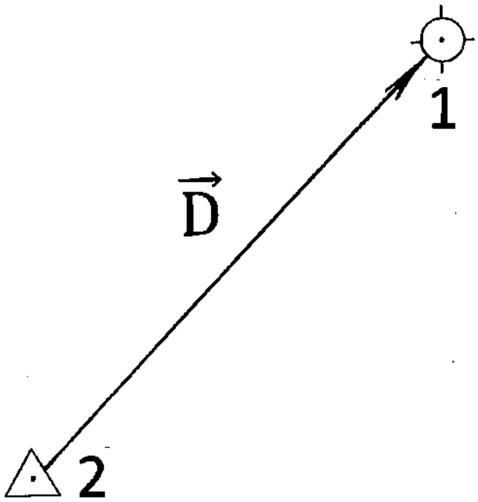

Рисунок 1.1. Определение местоположения пункта 1 относительно исходного (твёрдого) пункта 2.

На этом рисунке:

$$\vec{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix} = (\Delta X \quad \Delta Y \quad \Delta Z)^{T} - \qquad (1.1)$$

- вектор, соединяющий два пункта, который называют вектором базы. Этот вектор выражен в трехмерной (пространственной) прямоугольной (декартовой) системе координат X, Y, Z. Треугольником и номером 2 обозначен исходный пункт, то есть пункт, координаты которого X_2, Y_2, Z_2 с требуемой точностью известны из каталога. Определяемый пункт обозначен кружком и номером 1. Индекс T в правой части второго варианта формулы (1.1) означает транспонирование. Процедура транспонирования - это преобразование вектора-столбца в вектор-строку и наоборот - преобразование вектора-строки в вектор-столбец. Прибавив к известным координатам X_2, Y_2, Z_2 исходного пункта 2 значения разностей координат ΔX, ΔY, ΔZ, можно получить координаты X_1, Y_1, Z_1 вновь создаваемого определяемого пункта 1. В рамках теории матриц, вектор есть частный случай матрицы.

Часто интересует взаимное положение пунктов только в плане, то есть на плоскости геодезической проекции. Например, на плоскости проекции Гаусса-Крюгера. Это бывает, когда высота определяемого пункта имеет второстепенное значение. Например, на кадастровых планах. В этом случае вектор базы, выраженный на плоскости, то есть, в двухмерной системе координат x, y как разность плановых координат пунктов, имеет вид:

$$\vec{\mathbf{D}} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = (\Delta x \quad \Delta y)^{T} . \qquad (1.2)$$

Повторим, что представление результатов работы геодезиста в форме координат удобно и поэтому общепринято. Именно координаты пунктов, сопровожденные оценкой точности, есть результат работы специалиста, создающего геодезическую сеть.

Однако написано, что координаты - понятие условное. Следовательно, условным является и понятие разности координат пунктов. Поэтому нет возможности измерить координаты пункта и разности координат пунктов. Координаты пунктов и разности координат пунктов не могут быть величинами измеряемыми. Что же геодезист измерять может? Он измеряет угловые и линейные величины. Почему и для чего геодезист измеряет эти величины? Достаточно ли произвести эти измерения, чтобы получить корректный результат? Какой результат можно считать корректным?

1.1. Линейные и угловые измеряемые величины.

Создавая наземными методами геодезическую сеть, с помощью светодальномеров измеряют расстояния между пунктами. С помощью теодолитов измеряют горизонтальные углы. Существуют и другие угловые и линейные величины, которые измеряют в процессе создания и поддержания (обновления, совершенствования, уточнения, сгущения) опорной геодезической сети. Это - астрономические широты пунктов, астрономические долготы пунктов, астрономические азимуты, зенитные расстояния (углы наклона, вертикальные углы), разности расстояний между пунктами, превышения между пунктами, скорость изменения дальности между приёмником, принимающим сигнал наблюдаемого спутника, и этим наблюдаемым спутником (допплеровский метод). Эти измеряемые величины автор оставил за рамками рассмотрения в данном учебном пособии, либо упоминает о них по мере необходимости.

1.2. Связь измеряемых и определяемых величин, уравнение связи

Геодезист измеряет те и только те величины, которые позволяют получить величины определяемые, то есть получить, в конце концов, координаты пунктов опорной геодезической сети, сопровожденные оценкой точности. Как сказано, оценку точности приводят в виде ковариационной матрицы. Угловые и линейные величины измеряют потому, что эти величины связаны с определяемыми величинами *функционально*. Например, значение $\mathrm{D} = |\boldsymbol{D}|$ измеренного расстояния между пунктами, изображенными на рисунке 1.1, функционально связано с разностью координат этих пунктов соотношением:

$$\mathrm{D}^2 = \Delta^2\mathrm{X} + \Delta^2\mathrm{Y} + \Delta^2\mathrm{Z}; \text{ или } \mathrm{D} = (\Delta^2\mathrm{X} + \Delta^2\mathrm{Y} + \Delta^2\mathrm{Z})^{\frac{1}{2}}. \quad (1.3)$$

Для двухмерного случая:

$$\mathrm{D}^2 = \Delta^2\mathrm{x} + \Delta^2\mathrm{y}; \text{ или } \mathrm{D} = \left(\Delta^2\mathrm{x} + \Delta^2\mathrm{y}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.4)$$

Соотношения вида (1.3) и (1.4), связывающие измеряемые и определяемые величины, называют *уравнениями связи*. Составление уравнения (уравнений) связи является начальным (первым) этапом при выполнении уравнивания результатов геодезических измерений параметрическим способом.

2. Понятие матрицы

Наиболее простое соотношение, связывающее значение определяемой величины x со значением l измеренной (измеряемой) величины, имеет вид:

$$\boldsymbol{a}x + l = 0\,. \qquad (2.1)$$

В этой формуле $\boldsymbol{a}$ - это известный заранее с требуемой точностью коэффициент. Например, геодезист измеряет превышение h между двумя вбитыми в землю нивелирными костылями. Он использует инварные рейки, цена деления которых равна половине сантиметра (пяти миллиметрам). Разность l отсчетов на заднюю по нивелирному ходу рейку и на переднюю рейку также получится выраженной в полусантиметрах. В формуле (уравнении связи) (2.1) роль определяемого превышения h играет неизвестное x. Чтобы получить значение h определяемого превышения, выраженное в сантиметрах, миллиметрах, долях миллиметров, необходимо и достаточно разделить значение l измеренной величины пополам. Другими словами, величина коэффициента a равна двум. Значение определяемого неизвестного x из формулы (2.1) получают известным способом:

$$\mathrm{x} = -\frac{l}{a}; \quad \text{или} \quad \mathrm{x} = -l \cdot a^{-1}. \qquad (2.2)$$

Свободный член l в выражении (2.1), содержит, поскольку является результатом измерения, некоторую ошибку. Следовательно, и значение неизвестного x, полученное из выражения (2.2), также содержит ошибку. Эта ошибка тем меньше в сравнении с ошибкой результата измерения, чем больше значение коэффициента a. Таким образом, желательно иметь как можно большее значение коэффициента a.

Геодезическая сеть включает много определяемых неизвестных. В зависимости от того, из скольких пунктов состоит сеть, она может включать сотни и тысячи неизвестных. Государственная геодезическая сеть Советского Союза (ГГС СССР) включает примерно 160 тысяч пунктов. Существуют программы, которые позволяют выполнить обработку любой геодезической сети. Достаточно задать форму сети, ввести исходные данные, ввести результаты измерений и некоторую дополнительную информацию. В результате компьютер выдаст значения уравненных координат пунктов сети, сопроводив решение оценкой точности определяемых неизвестных в форме ковариационной матрицы. Но практика показывает, что специалист-пользователь, который может сделать только это, то есть специалист такого уровня подготовки, не может проанализировать и критически оценить результаты обработки.

Рассмотрим специалиста, осознавшего сложность процедуры обработки результатов измерений в опорной геодезической сети и взглянувшего на формулу (2.2). Простота этой формулы вызывает у него следующие вопросы. Нет ли возможности упростить процедуру вычисления большего (чем одно) количества определяемых величин? Нет ли возможности упростить понимание этой процедуры, используя тот же принцип, который использован при переходе от формулы (2.1) к формуле (2.2)? Существует ли соответствующий математический аппарат?

Такой математический аппарат существует. Это - матрицы или матричное исчисление. Матрицы эффективно используют во многих областях профессиональной деятельности, не только в геодезии. В данном учебном пособии рассмотрено использование матриц в обработке (уравнивании) результатов геодезических измерений. Без применения матриц (матричного исчисления) затруднительно понять смысл этой процедуры и смысл полученных результатов.

Пусть необходимо определить не одно неизвестное x, а два неизвестных: x_1 и x_2. Роль этих неизвестных выполняют координаты и/или разности координат пунктов. Итак, имеются два неизвестных x_1 и x_2, значения которых необходимо определить, использовав результаты измерений. Пусть также имеем результаты двух измерений l_1 и l_2, функционально связанные со значениями определяемых неизвестных. И пусть, в дополнение к этому, функция $f(x)=y$; $y \equiv l$, связывающая измеряемые и определяемые величины, имеет линейный вид. Тогда связь между измеряемыми и определяемыми величинами описывает система из двух линейных уравнений, содержащая два неизвестных:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + l_1 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + l_2 = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (2.3)$$

В этой системе уравнений первый нижний индекс при коэффициентах a определяет номер уравнения, или *номер строки*, в котором расположено это уравнение. Второй нижний индекс при коэффициентах a совпадает с номером того места, которое коэффициент a занимает в уравнении и совпадает с *номером столбца*, в котором этот коэффициент расположен. Индекс 1 и 2 при свободных членах l (при измеренных величинах) означает номер измеряемой (измеренной) величины, номер уравнения, *номер строки*. Простейший пример даёт ситуация, приведённая на рисунке 2.1.

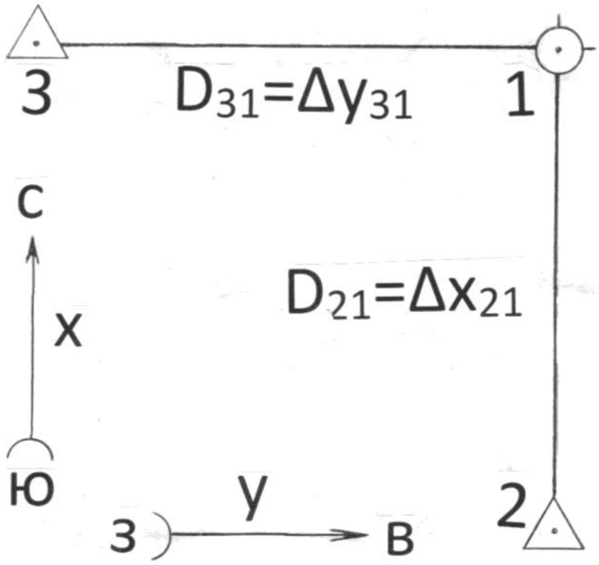

Рисунок 2.1. Измерение расстояния от исходных (твёрдых пунктов 2 и 3 до определяемого пункта 1.

На рисунке 2.1 приведена идеализированная ситуация. Имеются два исходных пункта 2 и 3, координаты которых известны из каталога, и определяемый пункт 1. Требуется определить плановые (на проекции Гаусса-Крюгера) координаты x, y пункта 1. В левой нижней части рисунка 2.1 показано направление осей координат. Измеряют расстояния от исходных пунктов 2 и 3 до определяемого пункта 1. Из результатов измерения расстояний можно определить разности координат Δx и Δy определяемого пункта и исходных пунктов. Именно эти разности координат являются определяемыми величинами. Роль измеряемых величин l_1 и l_2 играют расстояния (горизонтальные проложения) D_{21} и D_{31}. С учётом написанного представим выражение (2.3) в виде:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\Delta x_{21} + a_{12}\Delta y_{21} + D_{21} = 0 \\ a_{21}\Delta x_{31} + a_{22}\Delta y_{31} + D_{31} = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (2.4)$$

Идеализированность ситуации, то есть идеализированность геометрии наблюдений, состоит в том, что исходные пункты 2 и 3 расположены соответственно точно на запад и точно на юг от определяемого пункта 1. Следовательно, как показано на рисунке 2.1, значения расстояний между твердыми пунктами и пунктом определяемым, приведенные на плоскость проекции Гаусса-Крюгера, равны разностям плановых координат между твердыми (исходными) пунктами и вновь определяемым пунктом. Поэтому коэффициенты a в системе уравнений (2.4) принимают значения нулей и единиц и эта система приобретает вид:

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot\Delta x_{21} + 0\cdot\Delta y_{21} + D_{21} &= 0 \\ 0\cdot\Delta x_{31} + 1\cdot\Delta y_{31} + D_{31} &= 0 \end{aligned}\right\} . \qquad (2.5)$$

Идеализированность ситуации, то есть идеализированность геометрии наблюдений, состоит ещё и в том, что ошибка в определении Δx_{21}, то есть, ошибка координаты x определяемого пункта равна ошибке в измерении расстояния D_{21} и не влияет на ошибку в определении координаты y определяемого пункта. И наоборот, ошибка в определении Δy_{31}, то есть ошибка координаты y определяемого пункта равна ошибке в измерении расстояния D_{31} и не влияет на ошибку в определении координаты x определяемого пункта. Кратко говоря, ошибка каждой координаты определяемого пункта равна ошибке измерения расстояния и меньшей она быть не может.

Вернемся к системе (2.3) двух линейных уравнений, содержащих два неизвестных, с тем, чтобы дать, наконец, понятие *матрицы*. Запишем систему уравнений (2.3) в *матричной форме*:

$$\mathbf{AX} + \mathbf{L} = \mathbf{0} \ . \qquad (2.6)$$

В этом выражении приняты следующие обозначения.

Матрица A имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \qquad (2.7)$$

Повторим, что первый нижний индекс обозначает номер строки, а второй нижний индекс обозначает номер столбца.

Матрица-вектор (матрица-столбец, вектор-столбец) X имеет вид:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2)^{\mathrm{T}}. \qquad (2.8)$$

Матрица-вектор, матрица-столбец, вектор-столбец L имеет вид:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = (l_1 \quad l_2)^{T}. \qquad (2.9)$$

Матрица-вектор, матрица-столбец, вектор-столбец $\mathbf{0}$, нулевой вектор имеет вид:

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = (0 \quad 0)^{T} \ . \qquad (2.10)$$

Подставив выражения (2.7) - (2.10) в выражение (2.6), получим запись системы уравнений (2.3) в подробной матричной форме:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (2.11)$$

Матрицы - это таблицы, обладающие некоторыми свойствами и требующие соблюдения некоторых правил обращения с ними. Матрица, как особого рода таблица, удовлетворяет определённым требованиям и может быть подвергнута определённым математическим операциям. При этом математическим операциям подвергают таблицу (матрицу) как единое целое.

Вектор вида (1.1) также представляет собой матрицу, содержащую три строки и один столбец. Такой вектор называют матрица-столбец. Существуют матрицы-строки. В рамках теории матриц, число – это тоже матрица, содержащая одну строку и один столбец, то есть имеющая размерность 1×1. Например, коэффициент a, входящий в уравнение (2.1), можно рассматривать как матрицу, имеющую размерность один на один.

Сравнивая выражения (2.3) и (2.11) можно сделать заключения о том, что в матричном исчислении существует понятие равенства матриц, понятие сложения матриц и понятие умножения матриц.

Две матрицы равны, если равны элементы матриц, расположенные в одной и той же строке и в одном и том же столбце. Понятие равенства матриц имеет смысл, если размерность матриц одинакова, то есть матрицы состоят из одинакового количества строк и одинакового количества столбцов.

Процедуру сложения матриц выполняют, складывая элементы матриц, расположенные в одной и той же строке и в одном и том же столбце – на пересечении строк с одинаковыми номерами и столбцов с одинаковыми номерами. Понятие сложения матриц имеет смысл, то есть, процедуру сложения можно выполнить, если размерность матриц одинакова: матрицы состоят из одинакового количества строк и одинакового количества столбцов. Складываемые матрицы можно менять местами и при этом результат сложения не изменится.

Дадим понятие умножения матриц. Пусть даны две матрицы A и B:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{np} \end{pmatrix}. \qquad (2.12)$$

Количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B и равно n.

Произведением матриц A и B является матрица C:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mp} \end{pmatrix}. \qquad (2.13)$$

Элемент c_{ij} матрицы C, расположенный на пересечении строки с номером $i=1,2,...,m$ и столбца с номером $j=1,2,\ldots,p$, вычисляют по формуле:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}\,. \qquad (2.14)$$

Выразим порядок перемножения словами. Чтобы вычислить элемент c_{ij} матрицы C, расположенный на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, поочерёдно перемножают элементы строки с номером i матрицы A на элементы столбца с номером j матрицы B, а результаты перемножения складывают. Отсюда следует, что понятие произведения матриц имеет смысл только в том случае, когда количество столбцов матрицы А равно количеству строк матрицы В. Переставлять местами перемножаемые матрицы нельзя: либо не будет выполнено данное сформулированное условие, либо результат перемножения окажется иным.

Процедура умножения матрицы на число (числа на матрицу) состоит в том, что на это число умножают все элементы матрицы. Процедура деления матрицы на число состоит в том, что на это число делят все элементы матрицы.

Процедура деления матрицы на матрицу отсутствует. Как показано в разделе 6, процедуру деления заменяют процедурой умножения на обратную матрицу [3].

Теперь назрела необходимость прервать изложение аспектов матричного исчисления и рассмотреть задачи, связанные с оценкой точности измеряемых и определяемых величин.

3. Средняя квадратическая ошибка и вес измеряемой величины

В выражении (2.11) элементы l_i вектора результатов измерений $\mathbf{L}$ содержат неизбежные ошибки Δ_i. Эти ошибки представляют собой случайные величины с нулевым математическим ожиданием:

$$M(\Delta i) = 0. \qquad (3.1)$$

Значения ошибок Δ_i неизвестны и определить их невозможно. Известно только, что величины Δ_i имеют некоторый «разброс». Мерой этого разброса является математическое ожидание $M(\Delta_i^2)$ квадрата погрешности Δ_i. Величину $M(\Delta_i^2)$ называют *дисперсией* (вариацией) и обозначают σ^2. Таким образом:

$$\sigma^2 = M\left(\Delta_i^2\right). \qquad (3.2)$$

Величину σ называют *стандартом* случайной величины Δ_i. Дисперсия и стандарт погрешности Δ_i равны соответственно дисперсии и стандарту измеряемой величины l_i.

Весом p_i измеренной величины l_i называют величину, обратно пропорциональную дисперсии σ_i^2:

$$p_i = \frac{\mu^2}{\sigma_i^2} \; . \qquad (3.3)$$

Величину μ называют ошибкой единицы веса. Величину, обратную весу измеренной величины, называют обратным весом:

$$q_i = \frac{1}{p_i} \; . \qquad (3.4)$$

Из выражений (3.30 и (3.4) получим формулу для стандарта результата измерения:

$$\sigma_i = \mu\sqrt{\frac{1}{p_i}} = \mu\sqrt{q_i} \quad . \qquad (3.5)$$

Значение дисперсии и/или стандарта является, в теоретическом смысле, мерой точности результата измерения. Рассмотрим теперь, на примере измерения расстояния, каким образом практически оценивают точность результата измерения и сам результат измерения.

Измерения выполняют многократно. Обозначим количество измерений одного и того же расстояния n. Тогда количество избыточных (дополнительных, контрольных) измерений равно $(n\text{-}1)$. Окончательное значение $D_{ср}$ многократно измеренного расстояния получают как среднее значение из всех n успешных измерений. $D_{ср}$ - это практическая оценка математического ожидания измеряемого расстояния. Каждый результат D_i измерения отклоняется от $D_{ср}$ на величину V_i, где i - это номер измерения. Среднюю квадратическую ошибку m результата единичного измерения вычисляют по формуле:

$$m = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(D_i - D_{cp}\right)^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\left[\left(D_i - D_{cp}\right)^2\right]}{n-1`}} = \sqrt{\frac{[V^2]}{n-1`}} \ . \qquad (3.6)$$

Здесь во втором и третьем вариантах формулы для обозначения суммирования квадратов отклонений использован символ Гаусса, имеющий вид квадратных скобок. Средняя квадратическая ошибка m - это практическая оценка стандарта σ случайной величины – результата одного измерения расстояния. Обратим внимание на то, что в числителе стоит не количество измерений n, а количество избыточных измерений $(n\text{-}1)$. Это позволяет получить несмещённую оценку средней квадратической погрешности: $M(m)= \sigma$.

Чтобы вычислить среднюю квадратическую ошибку $m_{ср}$ среднего значения $D_{ср}$ измеряемого расстояния значение m делят на корень квадратный из количества n измерений:

$$m_{cp} = \frac{m}{\sqrt{n}}. \quad . \qquad (3.7)$$

Дадим практическую иллюстрацию оценки точности результата измерения. Пусть расстояние длиной в десятки километров между пунктами опорной геодезической сети измеряли в две видимости: в утреннюю видимость и в вечернюю видимость. Утром удалось сделать 4 приема измерений. Стало быть, в соответствии с формулой (3.7), средняя квадратическая ошибка среднего результата в 2 раза меньше средней квадратической ошибки m результата единичного измерения. Вечерняя видимость длится, как правило, дольше и вечером удалось сделать 16 приемов. Тогда, опять же в соответствии с формулой (3.7), средняя квадратическая ошибка среднего из вечерних наблюдений результата в 4 раза меньше средней квадратической ошибки m результата единичного измерения и в 2 раза меньше средней квадратической ошибки утреннего результата. Вес вечернего результата в 4 раза больше веса утреннего результата. Значение средней квадратической ошибки результата, которому приписан единичный вес, называют ошибкой единицы веса и, как написано, обозначают μ, то есть, в данном случае $m \equiv \mu$.

На практике, чтобы избежать сложностей с назначением весов результатов измерений, наблюдатели соблюдают принцип единообразия. Длину каждой линии измеряют по единой методике, одинаковым количеством приемов и, следовательно, с (примерно) одинаковой ошибкой. Результаты всех измерений признают независимыми, равноточными и обрабатывают именно как равноточные, то есть имеющие одинаковый вес. Этому подходу следуем и мы в дальнейшем изложении материала. Читатель, желающий усвоить принципы обработки результатов измерений, полученных с разной точностью и, следовательно, имеющих разные веса, а также имеющих разную размерность и находящихся в зависимости друг от друга, может удовлетворить своё желание, изучив такие работы, как [3,10].

4. Линеаризация уравнения связи

Изложенное справедливо только тогда, когда уравнение связи измеряемых и определяемых величин имеет линейный вид. Однако, в большинстве случаев измеряемые и определяемые величины связаны уравнениями, которые не являются линейными. Например, как видно из выражения (1.3), в случае измерения расстояний связь между измеренными и определяемыми величинами не является линейной. Теория же обработки результатов измерений разработана только для такой ситуации, когда уравнения связи имеют линейный вид. Поэтому возникает необходимость привести выражение типа (1.3) к линейному виду, то есть *линеаризовать* такое выражение. Для того, чтобы выполнить линеаризацию уравнения связи (1.3), измеренную величину расстояния D рассматривают как функцию определяемых величин разностей координат и эта функция имеет вид полного дифференциала. Для двухмерного случая имеем:

$$\left(\frac{\partial D}{\partial \Delta x}\right)_0 d\Delta x + \left(\frac{\partial D}{\partial \Delta y}\right)_0 d\Delta y + (D_0 - D) = 0. \qquad (4.1)$$

Индекс 0 при D и при частных производных означает, что значения этих величин получены для приближенных заранее принятых значений Δx_0 и Δy_0 разностей координат Δx и Δy пунктов. Приближенные значения x_0 и y_0 разностей координат можно, например, снять с карты. Приближенное значение

D_0 расстояния D вычисляют так, чтобы оно в точности соответствовало (по формуле (1.4)) значениям координат исходного пункта и приближенным значениям координат определяемого пункта.

Используя (1.4), получим выражения для частных производных функции измеряемой величины по определяемым величинам и подставим эти выражения в формулу (4.1). Кроме того, заменим дифференциалы $d\Delta x$ и $d\Delta y$ на поправки $V_{\Delta x}$ и $V_{\Delta y}$ в определяемые величины Δx и Δy. Формула (4.1) примет вид:

$$\left(\frac{\Delta x}{D}\right)_0 V_{\Delta x} + \left(\frac{\Delta y}{D}\right)_0 V_{\Delta y} + (D_0 - D) = 0. \quad (4.2)$$

В качестве определяемых неизвестных в формулу (4.1) включены *поправки* $V_{\Delta x}$ и $V_{\Delta y}$ *в приближенные значения* Δx_0 и Δy_0 определяемых неизвестных Δx и Δy. Окончательные (уравненные) значения определяемых неизвестных вычисляют по формулам:

$$\Delta x = \Delta x_0 + V_{\Delta x};\ \Delta y = \Delta y_0 + V_{\Delta y}. \quad (4.3)$$

Процедуру линеаризации уравнений связи выполняют при обработке результатов измерений в триангуляции, трилатерации и полигонометрии. В геометрическом нивелировании уравнения связи и без линеаризации имеют линейный вид. При создании геодезической сети спутниковым методом уравнения связи также изначально имеют линейный вид, поскольку из результатов наблюдений сразу, уже на этапе постобработки, получают разности координат пунктов, на которых одновременно были установлены спутниковаые геодезические приемники. Поэтому значения частных производных от функций измеряемых величин по определяемым величинам равны (по модулю) единице.

Линеаризованные уравнения связи, подвергаемые впоследствии математической обработке параметрическим способом, называют *параметрическими уравнениями*. Если уравнения связи линейны изначально, как это имеет место в геометрическом нивелировании и в спутниковом методе, то понятия «уравнение связи» и «параметрическое уравнение» совпадают.

5. Параметрические уравнения и нормальные уравнения

В системах уравнений (2.3) и (2.5) количество определяемых неизвестных равно количеству уравнений. Это значит, что в соответствующей матрице коэффициентов количество строк равно количеству столбцов. Такие матрицы называют квадратными. При создании геодезической сети количество измеренных величин существенно превышает количество неизвестных. Обозначим количество измеренных величин буквой n, а количество неизвестных, как и в соотношении (2.11), сохраним равным двум.

5.1. Параметрические уравнения

Запишем в матричном виде выражение, аналогичное (2.11):

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (5.1)$$

В краткой записи это соотношение повторяет по форме соотношение (2.6):

$$\mathbf{AX} + \mathbf{L} = \mathbf{0}. \qquad (5.2)$$

Обозначения здесь те же, что и в (2.8), (2.9) и (2.10) с учетом того, что количество измеренных величин равно не 2, а n.

Соотношение (5.1) и то же соотношение, записанное в форме (5.2), называют *системой параметрических уравнений*, а каждое уравнение, входящее в эту систему, называют *параметрическим уравнением*.

В (5.1) все неизвестные входят во все уравнения. Однако, как и бывает, состав измерений может быть таковым, что какое-либо из неизвестных x_1 и/или x_2 не входит в какое-либо из параметрических уравнений. Тем не менее, это неизвестное формально включают в данное уравнение, но с коэффициентом a, равным нулю. Таким образом формализуется (стандартизируется, унифицируется) процедура составления системы параметрических уравнений.

Каждый элемент l_i вектора L свободных членов получен из измерений. Поэтому, как написано в разделе 3, любой элемент l_i этого вектора содержит ошибку Δ_i. Величина и знак этой ошибки исполнителю неизвестны. Проблема состоит в том, что равенство (5.1) содержит больше уравнений, чем определяемых неизвестных, а свободные члены, как было только что написано, содержат ошибки Δ_i. Поэтому система уравнений (5.1) и та же система (5.2), записанная в матричном виде, решения не имеет. Такую систему уравнений называют несовместной. Чтобы, тем не менее, решение найти, причём решение единственное и корректное в смысле математики, необходимо ввести в измеренные величины некие поправки. При этом набор поправок не может быть произвольным. Другими словами, ход получения решения не может зависеть от воли (произвола) исполнителя, но должен выполняться в соответствии с некоей стандартной процедурой.

Прервём развитие этой мысли и выскажем соображения о количестве определяемых неизвестных. Автор намеренно ограничил рассмотрение двухмерным и трехмерным случаями. При создании геодезических сетей вектор-столбец X в (5.2) может содержать сотни и тысячи элементов. Матрица A содержит ещё гораздо большее количество строк. Количество столбцов в этой матрице (количество элементов в строке) равно количеству определяемых неизвестных, то есть количеству элементов в векторе-столбце X. Вектор-столбец L свободных членов содержит количество элементов, равное количеству строк в матрице A коэффициентов параметрических уравнений.

Вернемся теперь к задаче нахождения решения системы уравнений (5.1) и, что то же самое, системы уравнений (5.2), выраженной в матричной форме. Таковым решением является единственный набор x_1, x_2 определяемых неизвестных, при котором желаемые равенства (5.1) и (5.2) превратились бы в тождества. Для удовлетворения этого желания, а, по существу, для получения требуемого результата, в каждый элемент вектора-столбца L свободных членов необходимо ввести поправку v_i. Перенеся поправки в правую часть системы уравнений (5.2), запишем эту систему в виде:

$$\mathbf{AX} + \mathbf{L} = \mathbf{V}. \qquad (5.3)$$

В этом соотношении:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_i \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = (v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_i \quad \cdots \quad v_n)^T \quad - \qquad (5.4)$$

вектор-столбец поправок в значения измеренных величин. Следует отметить, что поправки v_i в некотором смысле «компенсируют» ошибки измерений Δ_i, но отнюдь не исключают эти ошибки полностью.

Подчеркнём, что понятие «значение измеренной величины» не совпадает с понятием «результат измерения». Значение измеренной величины принимают как окончательный (осреднённый) результат выполнения целой программы единичных измерений.

Итак, соотношения (5.1) и (5.2) представляют собой желаемое равенство, но не более того. Соотношение же (5.3) представляет собой равенство, которое выполнить возможно. Требуется только подобрать вектор V. Другими словами, требуется не сформулированным пока образом подобрать значения элементов вектора V поправок в элементы вектора L свободных членов. Значения элементов вектора поправок, обеспечивающие выполнение равенства в (5.3) можно подобрать множеством способов. Как было сказано, истинные значения этих поправок неизвестны и не могут быть известны. Следовательно, принцип подбора поправок может быть разным. Поправки могут иметь знак плюс и знак минус. Абсолютные значения этих поправок будут разными, но разумно потребовать, чтобы эти абсолютные значения не выходили за пределы допустимых погрешностей измерений. Но и такой разумный подход не позволяет пока получить единственное решение, то есть получить единственный набор значений определяемых неизвестных и, соответственно, единственный вектор поправок в значения измеряемых величин.

5.2. Критерий выбора решения, принцип способа наименьших квадратов

Итак, для нахождения единственного решения системы уравнений (5.3) необходимо подобрать совокупность поправок в измеренные величины, и при этом значения поправок не могут быть получены из результатов измерений. Возникает вопрос: откуда же эти значения можно получить, следуя при этом не произволу, но единой методике? Забегая вперед скажем, что именно такое единственное решение даёт применение принципа (способа, метода) *наименьших квадратов*. Прежде скажем о принятии решения с использованием *критерия*.

Прежде чем принимать решение, лучшее из возможных, необходимо сформулировать критерий. Поскольку геодезист работает с числами, критерий решения должен быть выражен в виде числа и не может быть основан на субъективных (вкусовых) соображениях.

Рассмотрим для начала следующий критерий: решение необходимо получить при условии, что *сумма поправок* V будет минимальной. На поверхностный взгляд этот критерий разумный. При внимательном же рассмотрении этот критерий оказывается никуда не годным. Можно подобрать такую совокупность поправок, для которой значения V, имея большие по модулю но разные по знаку значения, компенсируют друг друга. Сумма же этих поправок не только будет мала, но может и вообще быть равной нулю.

В качестве второго критерия рассмотрим следующий: решение необходимо получить при условии, что минимальной будет *сумма квадратов* поправок V:

$$\sum_{i=1}^{n}(v_1^2 + \quad v_2^2 + \cdots \quad v_i^2 + \cdots \quad v_n^2) = [vv] = \min. \quad (5.5)$$

Именно этот критерий лежит в основе *способа (метода) наименьших квадратов*.

Хорошей и простой иллюстрацией применения критерия (5.5) является процедура обработки результатов многократных измерений одного расстояния, описанная в разделе 3. Эту процедуру обработки и получения окончательного значения одной измеряемой величины мы используем в качестве аналогии определения нескольких неизвестных. Для получения единственного результата необходимо выполнить одно измерение. Геодезист же, следуя инструкции, выполняет n измерений. Следовательно, геодезист выполняет (n-1) избыточное измерение. Количество избыточных измерений обозначают буквой r, видимо от английского термина redundancy - избыточность, чрезмерность. Избыточные измерения позволяют выявить результаты единичных измерений, которые содержат грубые ошибки и исключить эти результаты из дальнейшей обработки. Из оставленных для последующей обработки результатов успешных единичных измерений образуют среднее значение, которое и принимают за окончательный результат измерения. Суть такого подхода в том, что этот окончательный результат удовлетворяет критерию (5.5), то есть практически реализует способ (метод) наименьших квадратов. В это среднее значение вводят все необходимые поправки: аппаратурные поправки, поправки за влияние окружающей среды, редукционные поправки [6].

Подчеркнём, что в результате обработки по способу наименьших квадратов истинного значения измеряемой величины не получают. Получают результат, обладающий *наименьшей дисперсией*. Говорят и пишут, что при этом используют принцип наименьшего риска.

Теперь следует рассмотреть случай, когда определяемыми являются несколько величин, а не одна. При этом количество избыточных измерений равно не числу измеренных величин без единицы, но равно числу измеренных величин, уменьшенному на количество определяемых неизвестных. Пусть, в простейшем случае, количество определяемых величин равно двум. Задача состоит в том, чтобы получить единственный вектор неизвестных X для соотношения (5.1) и (5.2) под условием выполнения критерия (5.5). Сумма квадратов поправок в (5.4) должна быть минимальной. Именно эту задачу и решает способ наименьших квадратов. Полученные в результате обработки поправки в англоязычной литературе называют residuals – остаточные поправки, остаточные погрешности.

Для соблюдения этого условия и выполнения следующего шага в обработке результатов измерений необходимо перейти от системы параметрических уравнений (5.3) к системе нормальных уравнений.

5.3. Нормальные уравнения

Систему *нормальных уравнений* получают из системы параметрических уравнений (5.3), умножив систему параметрических уравнений слева на транспонированную матрицу $\mathbf{A}$ коэффициентов параметрических уравнений, то есть, на матрицу $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Для соотношения (5.3) это преобразование даёт:

$$\mathbf{A^TAX} + \mathbf{A^TL} = \mathbf{0}. \tag{5.6}$$

Используют следующие обозначения.

$$\mathbf{A^TA} = \mathbf{N} \quad - \tag{5.7}$$

матрица коэффициентов системы нормальных уравнений;

$$\mathbf{A^TL} = \mathbf{L} \ - \tag{5.8}$$

матрица свободных членов системы нормальных уравнений.

С учётом этих обозначений выражение (5.6), представляющее собой систему нормальных уравнений, приобретает вид:

$$\mathbf{NX} + \mathbf{L} = \mathbf{0}. \tag{5.9}$$

Подставим выражение для матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов параметрических уравнений из системы уравнений (5.1) в систему (5.7) нормальных уравнений, получим:

$$\mathbf{N}_{2\times2} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \dots & a_{i1} \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} \dots & a_{i2} \dots & a_{n2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} [a_{i1}a_{i1}] & [a_{i1}a_{i2}] \\ [a_{i2}a_{i1}] & [a_{i2}a_{i2}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{N}_{11} & \mathrm{N}_{12} \\ \mathrm{N}_{21} & \mathrm{N}_{22} \end{pmatrix} . \qquad (5.10)$$

Получилась матрица, в которой количество строк равно количеству столбцов. Такие матрицы, как написано ранее, называют квадратными. Размерность матрицы (5.10) - два на два, то есть 2 × 2. Количество строк, то есть количество нормальных уравнений, равно количеству неизвестных. Таким образом, проблема, о которой написано в подразделе 5.1 и связанная с тем, как обойтись с избыточными измерениями, решена.

Как и ранее, в (5.10), квадратные скобки обозначают суммирование в символах Гаусса. Суммирование выполняют по текущему значению i от 1 до n. Элементы N_{11} и N_{22} называют квадратичными. Говорят и пишут, что эти элементы расположены на главной диагонали матрицы $\mathbf{N}$. На перпендикулярной диагонали расположены элементы, которые численно равны друг другу. Матрицу, элементы которой симметричны относительно главной диагонали и равны друг другу, называют *симметричной*. Всё сказанное справедливо для квадратных матриц любого размера (любой размерности): 3 × 3, 4 × 4 и так далее.

Подставим теперь выражение для вектора $\mathbf{L}$ свободных членов параметрических уравнений из (5.1) в матрицу (вектор) $\mathbf{L}$ (5.8) свободных членов нормальных уравнений и получим таким образом выражение для вектора свободных членов нормальных уравнений в явном виде:

$$\mathbf{L} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{L} = \begin{pmatrix} [a_{i1}l_i] \\ [a_{i2}l_i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_2 \end{pmatrix} . \qquad (5.11)$$

Таким образом, выражения (5.6) – (5.9) позволяют перейти от системы параметрических уравнений (5.1) к системе нормальных уравнений. Выражения (5.10) и (5.11) описывают алгоритмы этого перехода. Все эти выражения и алгоритмы справедливы не только для случая, когда определяют два неизвестных. Они справедливы для любого количества неизвестных: трёх, четырех и так далее, и для любого количества измеренных величин, превышающего количество неизвестных. В частности, матрица коэффициентов при неизвестных в трёхмерном случае, то есть когда определяют не два параметра, как в системе (5.10), а три параметра, имеет, по аналогии с (5.10), вид:

$$\mathbf{N}_{3\times 3} = \begin{pmatrix} \mathrm{N}_{11} & \mathrm{N}_{12} & \mathrm{N}_{13} \\ \mathrm{N}_{21} & \mathrm{N}_{22} & \mathrm{N}_{23} \\ \mathrm{N}_{31} & \mathrm{N}_{32} & \mathrm{N}_{33} \end{pmatrix}. \qquad (5.12)$$

Казалось бы, проблема определения вектора неизвестных решена: количество линейных уравнений в системе (5.6) (в системе (5.9)) равно количеству неизвестных и решение этой системы - лишь дело техники. Будь то два неизвестных, три неизвестных или любое другое количество неизвестных. Однако прежде чем пытаться получить это решение, то есть прежде, чем пытаться получить вектор $\mathbf{X}$ неизвестных, следует убедится в том, что это решение существует. В случае, если решение существует, следует оценить, как ошибки определяемых неизвестных, то есть ошибки элементов вектора $\mathbf{X}$ (выражения (5.1) и (5.2)), связаны с ошибками элементов вектора L результатов измерений.

Решение системы (5.6) и, что то же самое, (5.9) не существует, если строки и/или столбцы матрицы $\mathbf{N}$ коэффициентов системы нормальных уравнений *линейно зависимы*. Признаком наличия линейной зависимости является равенство нулю *определителя* матрицы $\mathbf{N}$.

Понятие определителя матрицы дано в следующем разделе 6. Пока же, забегая вперёд, скажем следующее. Чем больше значение определителя матрицы коэффициентов нормальных уравнений, тем с меньшей потерей точности осуществляется переход от измеренных величин к определяемым неизвестным. Если геодезическую сеть создают с использованием методов трилатерации, полигонометрии или триангуляции, то значение определителя матрицы N зависит от геометрии (формы, конфигурации) этой геодезической сети. Другими словами, существует зависимость значения определителя от взаимного планового расположения пунктов геодезической сети. Если геодезическую сеть создают спутниковым методом, то геометрия сети не влияет на точность определения координат (разностей координат) пунктов. Это следует из того обстоятельства, что, как написано в разделе 4, значения частных производных от функции измеренной величины по определяемым величинам по модулю равны единице. Точность определения координат (разностей координат) пунктов геодезической спутниковой сети зависит от расположения спутников на небосклоне в эпоху наблюдений. Точность сети геометрического нивелирования также не зависит от взаимного (в плане) расположения реперов. Она зависит от точности выполнения нивелирования и от расстояний между реперами.

6. Разрешимость системы нормальных уравнений

Подчеркнём ещё раз, что матрица коэффициентов системы нормальных уравнений является квадратной. Только для таких матриц, у которых количество столбцов равно количеству строк, имеет смысл изложенное далее.

6.1. Линейная зависимость нормальных уравнений в системе

Систему уравнений называют *линейно зависимой*, если по крайней мере одно из уравнений получено как *линейная комбинация* каких-либо других уравнений, входящих в систему. Решение линейно зависимой системы уравнений отсутствует. Другими словами, попытка решения такой системы не приводит к получению значения ни одного из неизвестных.

Поясним теперь, что означает термин «линейная комбинация» на примере системы уравнений (2.3). Рассмотрим первый случай наличия линейной зависимости. Сформируем сумму или разность двух уравнений и присоединим вновь полученное уравнение к системе (2.3). Третье уравнение является линейной комбинацией двух первых уравнений. Рассмотрим второй случай наличия линейной зависимости. Умножим любое из двух уравнений (первое или второе) на какое-либо число (отличное от нуля) и присоединим вновь полученное уравнение к системе. В этом случае третье уравнение также является линейной комбинацией первого (или второго) уравнения. Рассмотрим третий случай наличия линейной зависимости, который объединяет два первых случая. Умножим каждое из двух уравнений на какое-либо число, сформируем сумму или разность получившихся уравнений и присоединим вновь полученное уравнение к системе. И в этом случае третье уравнение является линейной комбинацией первого и второго уравнений. Написанное справедливо для случая определения двух, трех, четырёх и большего количества неизвестных.

Матрицу коэффициентов системы нормальных уравнений, то есть квадратную матрицу, содержащую по крайней мере одно уравнение, являющееся линейной комбинацией каких-либо из остальных уравнений называют *вырожденной матрицей*. Признаком вырожденности матрицы является, как написано ранее, равенство нулю определителя этой матрицы. Понятие определителя матрицы рассмотрено в следующем подразделе 6.2. Пока же сообщим только о том, как такая вырожденная матрица коэффициентов системы нормальных уравнений возникнуть может.

Матрица коэффициентов системы нормальных уравнений с неизбежностью станет вырожденной в том случае, если эта матрица сформирована (в соответствии с алгоритмом (5.10) из линейно зависимой матрицы коэффициентов параметрических уравнений. Другими словами, если хотя бы одна строка матрицы $\mathbf{A}$ коэффициентов в выражении (5.1) является линейной комбинацией каких-либо других строк, то матрица N (соотношение (5.10)) с неизбежностью станет вырожденной и никакого решения не получится. Сказанное справедливо для любого количества неизвестных. Сказанное справедливо также и в том случае, если линейно зависимыми окажутся и столбцы матрицы [1,3]. Возникает вопрос о том, в каких случаях измерений и обработки результатов этих измерений может возникнуть линейная зависимость матрицы коэффициентов параметрических уравнений и, следовательно, вырожденность соответствующей матрицы коэффициентов нормальных уравнений.

Такая вырожденность, как ни странно, может возникнуть даже в случае идеальной геометрии наблюдений, приведенной на рисунке 2.1. Это может произойти, если исполнитель пожелает присоединить к результатам измерения расстояний ещё и результаты измерения разности тех же расстояний. Действительно, существуют радиотехнические (радиогеодезические, радионавигационные) системы [6,7], которые позволяют измерять именно разности расстояний, а не сами расстояния. Такие радиотехнические системы называют разностными и/или гиперболическими системами. Попытка объединить результаты дальномерных измерений и результаты измерений разности расстояний приводит к линейной зависимости матрицы коэффициентов параметрических уравнений и, следовательно, к вырожденности матрицы коэффициентов нормальных уравнений. Говорят, что в таких случаях решение получается вырожденным, то есть, как сказано ранее, несуществующим. Такую геометрическую ситуацию и в случае наземных измерений и в случае спутниковых измерений называют также *критической*. Положение не меняет и то обстоятельство, что результаты измерений получены разной аппаратурой, с разной точностью и независимо друг от друга. Ведь это обстоятельство влияет только на значения свободных членов системы параметрических уравнений и, следовательно, системы нормальных уравнений. На структуру же матриц коэффициентов системы параметрических уравнений и, следовательно, системы нормальных уравнений влияет только то, какие именно величины и/или линейные комбинации этих величин измерены, но не влияет то, как, когда и какими техническими средствами измерения были выполнены.

Приведём еще один пример ситуации, когда решение получается вырожденным. При создании опорной геодезической сети методом радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой [7] возникает задача определения (уточнения) векторов баз радиоинтерферометров, то есть, векторов баз, соединяющих принимающие участие в наблюдениях радиотелескопы. Одновременно возникает задача определения (уточнения) ориентировки осей системы координат, в которой выражены компоненты этого вектора базы – определения координат полюса. Попытка одновременно включить поправки в координаты векторов баз и поправки в координаты полюса в одну систему параметрических уравнений приводит к вырожденности решения. Можно сделать вывод, что попытка уточнить одновременно и компоненты вектора базы и параметры системы координат, в которой выражены эти компоненты вектора, включив соответствующие параметры в единую систему уравнений, к успеху не приводит. На самом деле, используя результаты измерений, выполненных методом радиоинтерферометрии со сверхдлинной базой, определяют и векторы баз радиоинтерферометров и координаты полюса на эпоху наблюдений. Но при этом выполняют уточнение соответствующих параметров методом последовательных приближений, не включая их одновременно в одну и ту же систему параметрических уравнений. Исполнитель столкнётся с вырожденным решением и в том случае, если намеренно или по незнанию попытается включить в решение неизвестное, которое функционально не связано с измеренными величинами.

Как написано, критерием вырожденности или не вырожденности матрицы коэффициентов системы параметрических уравнений является равенство или неравенство нулю определителя этой матрицы. Дадим теперь понятие *определителя матрицы*. Исчерпывающим образом это изложено, например, в работах [1,3,5].

6.2. Определитель матрицы, вычисление определителя матрицы

Определитель матрицы второго порядка $\mathbf{N}$, смотри выражение (5.10), вычисляют по известной из школьного курса формуле:

$$|\mathrm{N}_{2\times 2}| = \mathrm{N}_{11}\mathrm{N}_{22} - \mathrm{N}_{21}\mathrm{N}_{12}\,. \tag{6.1}$$

Как видно, определитель вычисляют, перемножив значения элементов матрицы, стоящие на её главной диагонали, и вычтя из результата произведение элементов, стоящих на диагонали, ей перпендикулярной. При этом, разумеется, учитывают знаки элементов матрицы.

Определитель матрицы N (5.12) третьего порядка вычисляют по формуле:

$$|\mathrm{N}_{3\times 3}| = (\mathrm{N}_{11}\mathrm{N}_{22}\mathrm{N}_{33} + \mathrm{N}_{12}\mathrm{N}_{23}\mathrm{N}_{31} + \mathrm{N}_{21}\mathrm{N}_{32}\mathrm{N}_{13}) - (\mathrm{N}_{13}\mathrm{N}_{22}\mathrm{N}_{31} + \mathrm{N}_{12}\mathrm{N}_{21}\mathrm{N}_{33} + \mathrm{N}_{23}\mathrm{N}_{32}\mathrm{N}_{11}). \tag{6.2}$$

Первый ограниченный круглыми скобками член содержит три слагаемых. Первое слагаемое представляет собой произведение элементов, стоящих на главной диагонали матрицы (5.12). Второе и третье слагаемые представляют собой произведения элементов матрицы (5.12), расположенных в вершинах равнобедренных треугольников. Основания этих треугольников параллельны главной диагонали. Второй ограниченный квадратными скобками член также содержит три слагаемых. Структура этого члена имеет ту же структуру, что и структура первого члена. Только роль главной диагонали здесь играет диагональ, перпендикулярная главной диагонали матрицы. Специалисту, знакомящемуся с процедурой вычисления определителей, полезно вспомнить порядок вычисления определителя матрицы третьего порядка.

С возрастанием порядка матрицы сложность процедуры вычисления её определителя стремительно возрастает. Процедура вычисления определителей матриц более высоких порядков описана в работах [1,3,5]. Существуют компьютерные программы, позволяющие вычислять определители матриц сколь угодно больших порядков. Ограничимся матрицами (и их определителями) второго и третьего порядка. Это целесообразно, поскольку в рамках данного учебного пособия рассмотрена задача определения только двухмерных векторов (1.2) и трёхмерных векторов (1.1). Определители матриц вычисляют в процессе формирования обратных матриц.

6.3. Обратная матрица

Вернёмся к линейному уравнению (2.1), к решению этого уравнения в виде (2.2) и напомним о стремлении решить систему уравнений (5.9) аналогичным образом, то есть путём деления свободного члена на коэффициент при неизвестном. Как написано в разделе 1, в матричном исчислении отсутствует процедура деления. Зато существует процедура вычисления обратной матрицы, как существует известная процедура вычисления значения числа, обратного данному числу, смотри соотношение (2.2). Если умножить число на число ему обратное, то в результате получится единица.

По аналогии с числами обратная матрица должна быть таковой, чтобы её произведение на порождающую матрицу, её ещё называют прямой матрицей, было бы равно чему-то, аналогичному единице. Такой аналогией является *единичная матрица* **E**:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.3)$$

На главной диагонали единичной матрицы стоят единицы, а все остальные (недиагональные) элементы этой матрицы равны нулю. Запишем в виде формулы написанное словами ранее о связи прямой и обратной матриц:

$$\mathbf{N^{-1}N} = \mathbf{E}\,. \qquad (6.4)$$

В двухмерном случае матрицы **N** и $\mathbf{N}^{-1}$ имеют размерность 2 × 2. Матрица **E** также имеет размерность 2 × 2. Обозначим элементы обратной матрицы через q_{ij} с нижними индексами, первый из которых i, как и всегда, обозначает номер строки, а второй j - номер столбца. Тогда в подробной записи для двухмерного случая выражение (6.4) принимает вид:

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_{11} & N_{12} \\ N_{21} & N_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (6.5)$$

Представим (6.5) в виде системы уравнений, где роль неизвестных выполняют элементы q_{ij} обратной матрицы:

$$\left.\begin{aligned} N_{11}q_{11} + N_{21}q_{12} = 1 \\ N_{12}q_{11} + N_{22}q_{12} = 0 \\ N_{11}q_{21} + N_{21}q_{22} = 0 \\ N_{12}q_{21} + N_{22}q_{22} = 1 \end{aligned}\right\}. \qquad (6.6)$$

В результате решения элементы, лежащие на главной диагонали, приобретают вид:

$$q_{11} = \frac{N_{22}}{|N|}\ ;\ \ q_{22} = \frac{N_{11}}{|N|}. \qquad (6.7)$$

С учётом того, что матрица (5.10) является симметричной, то есть, $N_{12} = N_{21}$, получим выражение для недиагональных элементов обратной матрицы:

$$q_{12} = q_{21} = -\frac{N_{21}}{|N|} = -\frac{N_{12}}{|N|}. \qquad (6.8)$$

В (6.7) и (6.8), также, как и в (6.1), $|N|$- это определитель матрицы (5.10) коэффициентов системы нормальных уравнений. Из формул (6.7) и (6.8) сразу видно, что, для матрицы с нулевым определителем, то есть для вырожденной матрицы, обратную матрицу сформировать невозможно.

6.4. Порядок вычисления обратной матрицы

Из сопоставления (6.7) и (6.8) с (5.10) видно, что числители элементов обратной матрицы $\mathbf{Q}$ второго порядка формируют следующим образом. В числителе q_{11} стоит N_{22}. Этот элемент матрицы $\mathbf{N}$, который расположен в первой строке и в первом столбце, остается после того, как мысленно вычеркнуты все элементы этой первой строки и первого столбца матрицы $\mathbf{N}$. Элемент N_{22} в этом двухмерном случае является (его так называют) *алгебраическим дополнением* элемента N_{11} и его обозначают A_{11}. Аналогично числитель q_{22} расположенного во второй строке и во втором столбце матрицы N, представляет собой элемент N_{11}, оставшийся после мысленного вычёркивания всех элементов второй строки и второго столбца. Его называют алгебраическим дополнением элемента N_{22} и обозначают A_{22}. По тому же мнемоническому правилу, путем мысленного вычёркивания элементов соответствующих строк и столбцов, получают алгебраические дополнения A_{12} и A_{21} для недиагональных элементов N_{12} и N_{21}, то есть для элементов, стоящих вне главной диагонали матрицы N и симметричных относительно этой диагонали. При этом, как видно из (6.8), знак алгебраического дополнения меняется на противоположный. В этом отношении существует общее и также мнемоническое правило: знак алгебраического дополнения меняется на противоположный, если сумма верхнего и нижнего индексов представляет собой число нечётное. Алгебраические дополнения A_{12} и A_{21} равны, потому, что равны N_{12} и N_{21}. Знаменателем всех элементов обратной матрицы N^{-1} является определитель (5.10) матрицы коэффициентов нормальных уравнений. Исходя из сказанного, обратную матрицу можно записать в виде:

$$N_{2\times2}^{-1} = \frac{1}{|N_{2\times2}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}. \qquad (6.9)$$

В двухмерном случае (5.10) алгебраические дополнения представляют собой числа. В случае трехмерной матрицы и матрицы большей размерности алгебраическое дополнение также представляет собой число. Но это число получают, вычислив определитель матрицы, имеющей размерность, на порядок меньший размерности исходной матрицы и взятый с определенным знаком: изменённым или неизменённым. Поясним сказанное более подробно, введя понятие *минора* (minor — меньший, уменьшенный) матрицы.

Процедура составления минора (для) какого - либо элемента квадратной матрицы состоит в следующем. Мысленно вычёркивают ту строку и тот столбец, на пересечении которых расположен данный элемент. Тем самым получают матрицу, имеющую порядок, на единицу меньший. После составления минора вычисляют определитель получившейся уменьшенной таким образом матрицы. Алгебраическое дополнение соответствующего элемента исходной матрицы и есть определитель минора. Рассмотрим это на примере трехмерной матрицы, обратной матрице (5.12). По аналогии с (6.9) запишем обратную матрицу в виде:

$$N_{3\times 3}^{-1} = \frac{1}{|N_{3\times 3}|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} \end{pmatrix}.$$

(6.10)

В этом выражении элемент A_{11} вычислен следующим образом. Мысленно вычеркнуты элементы первой строки матрицы (5.12) и элементы первого столбца этой матрицы. Вычислен определитель оставшейся двухмерной матрицы. Получено таким образом алгебраическое дополнение элемента N_{11} матрицы (5.12). Знак определителя не изменён:

$$A_{11} = +(N_{22}N_{33} - N_{32}N_{23}) \quad . \qquad (6.11)$$

Знак алгебраического дополнения остался неизменным, потому, что, как написано ранее, сумма верхнего и нижнего индексов элемента (N_{11} и/или A_{11}) является чётной. Другими словами, элемент стоит на пересечении строки и столбца, номера которых в сумме дают число чётное. Иным образом обстоит дело со знаком алгебраического дополнения элемента, стоящего на пересечении первой строки и второго столбца. Сумма номеров строки и столбца нечетная и знак алгебраического дополнения будет изменён на противоположный:

$$A_{12} = -(N_{21}N_{33} - N_{31}N_{23}). \qquad (6.12)$$

Этот алгоритм действует и при вычислении алгебраических дополнений для всех остальных семи элементов матрицы, входящей в выражение (6.10). Этим же правилам следуют, вычисляя обратные матрицы N^{-1} для матриц N любого более высокого порядка. С увеличением порядка матрицы N громоздкость вычисления обратной матрицы N^{-1} стремительно возрастает. Благо, что существуют компьютерные программы, позволяющие вычислять обратные матрицы (обращать матрицы) практически любого порядка, вплоть до сотен тысяч.

7.Решение системы нормальных уравнений

Существует несколько способов решения системы нормальных уравнений. Существует способ Гаусса [3,11]. Этот способ называют способом последовательного исключения неизвестных. Имеется способ последовательных приближений. В существующей практике для решения системы нормальных уравнений используют программы и алгоритмы, основанные на вычислении и дальнейшем использовании обратной матрицы системы нормальных уравнений. Повторим написанное в предшествующем разделе. На основании формул (6.7) – (6.10) можно утверждать, что в случае, если матрица коэффициентов системы нормальные уравнений является вырожденной, то есть определитель этой матрицы равен нулю, то решение этой системы уравнений отсутствует.

7.1. Вычисление вектора неизвестных с использованием обратной матрицы

Вернёмся к выражению (5.9). Умножим слева обе части этого выражения на обратную матрицу N^{-1}, получим:

$$\mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}X = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{L}. \qquad (7.1)$$

В соответствии с выражением (6.4), произведение $\mathbf{N}^{-1}\mathbf{N}$ равно единичной матрице $\mathbf{E}$. По аналогии с числами это означает, что в левой части (7.1) стоит только вектор $\mathbf{X}$ определяемых неизвестных и (7.1) принимает окончательный вид:

$$\mathbf{X} = -\mathbf{N}^{-1}\mathbf{L}. \qquad (7.2)$$

Это и есть то выражение, которое позволяет вычислить вектор определяемых неизвестных. Выражение (7.2) аналогично выражению (2.2), к чему мы и стремились с самого начала. Но не так всё просто в геодезии. Следует не только определить вектор $\mathbf{X}$ неизвестных. Необходимо оценить ошибки определяемых неизвестных, то есть ошибки элементов вектора $\mathbf{X}$. Необходимо также определить, как ошибки определяемых неизвестных связаны между собой. Достоинство способа решения системы нормальных уравнений с использованием обратной матрицы в сравнении с другими способами решения этой системы состоит именно в том, что обратная матрица даёт возможность исчерпывающим образом оценить точность определения неизвестных в их совокупности.

7.2. Оценка точности элементов вектора определяемых неизвестных

В формулах (6.5) – (6.10) элементы обратной матрицы $\mathbf{N}^{-1}$ обозначены как q. В таком обозначении есть свой смысл. Каждый элемент q_{ii} обратной матрицы $\mathbf{Q}$, смотри формулы (6.9), (6.10), расположенный на главной диагонали этой матрицы, представляет собой обратный вес неизвестного, которому приписан номер i. Поэтому матрицу N^{-1} также обозначают $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{N}^{-1} \equiv \mathbf{Q}, \qquad (7.3)$$

и называют *матрицей обратных весов*. Хотя недиагональные элементы этой матрицы не являются обратными весами. Математический смысл недиагональных элементов пояснён далее.

Как один из результатов обработки и уравнивания геодезической сети, созданной спутниковым методом, наземными методами или сочетанием спутникового метода и наземных методов, программа позволяет получить *ковариационную матрицу* $\mathbf{K}$ определяемых неизвестных – координат пунктов геодезической сети:

$$\mathbf{K} = \boldsymbol{\sigma}^2\mathbf{Q}. \qquad (7.4)$$

В этой формуле $\boldsymbol{\sigma}^2$ – дисперсия единицы веса определяемых неизвестных. Символ дан утолщенным шрифтом, чтобы отличить его от символа, обозначающего дисперсию σ^2 единицы веса измеренных величин, раздел 3.

Элемент $\boldsymbol{\sigma}^2 q_{ii}$, расположенный на главной диагонали матрицы $\mathbf{K}$ представляет собой дисперсию (практическую оценку дисперсии) соответствующего неизвестного, то есть, квадрат средней квадратической ошибки этого неизвестного. Элемент $\boldsymbol{\sigma}^2 q_{ii}$, i≠j, расположенный вне главной диагонали (недиагональный элемент) матрицы $\mathbf{K}$ на пересечении строки с номером i и столбца с номером j характеризует взаимосвязь дисперсий неизвестных, которым приписаны номера i и j. Если представить написанное в терминах теории вероятностей, то недиагональный элемент $\boldsymbol{\sigma}^2 q_{ii}$ матрицы $\mathbf{K}$ представляет собой математическое ожидание M произведения двух центрированных случайных величин $\dot{x}_1$ и $\dot{y}_j$:

$$\boldsymbol{\sigma}^2 q_{ij} = M(\dot{x}_1 \cdot \dot{y}_j), \text{ где: } \dot{x}_1 = x - M(x);\ \dot{y}_j = y - M(y). \qquad (7.5)$$

Под термином «случайная величина» понимают определяемое неизвестное. Величину $M(\dot{x}_i \cdot \dot{y}_j)$ называют *функцией корреляции* случайных величин $\dot{x}_1$ и $\dot{y}_j$.

Вернёмся к математическому смыслу недиагональных элементов матрицы $\mathbf{Q}$ обратных весов. Повторим, что обратные веса определяемых неизвестных расположены только на главной диагонали этой матрицы. Недиагональный же элемент представляет собой *коэффициент корреляции* определяемых неизвестных с номерами i и j:

$$q_{ij} = \frac{\mathbf{M}(\dot{x}_i \cdot \dot{y}_j)}{\boldsymbol{\sigma}^2}, \qquad (7.6)$$

Матрица $\mathbf{Q}$ симметричная, то есть $q_{ij} = q_{ji}$. Для получения матрицы $\mathbf{Q}$ обратных весов определяемых неизвестных в качестве исходной матрицы используют матрицу $\mathbf{A}$ коэффициентов параметрических уравнений. Значения элементов матрицы $\mathbf{A}$ зависят только от геометрии геодезической сети, от геометрии наблюдений, и не зависят от результатов наблюдений, от ошибок результатов этих наблюдений. Геометрию геодезической сети в форме навигационных координат пунктов этой сети можно знать уже после выполнения обследования и рекогносцировки геодезической сети, до этапа наблюдений. Координаты существующих пунктов внесены в каталог.

Приближенные координаты пунктов можно снять с карты. Таким образом, оценку точности геодезической сети в форме матрицы $\mathbf{Q}$ обратных весов можно получить до выполнения измерений (наблюдений).

В результате уравнивания результатов измерений получают практическую оценку стандарта σ_{ii} определяемой величины в форме средней квадратической ошибки m_{ii}, то есть, в практических вычислениях $\sigma_{ii} \equiv \mathbf{m_{ii}}$. Практическую оценку стандарта $\boldsymbol{\sigma}$ единицы веса определяемых величин обозначают $\boldsymbol{\mu}$, то есть, в практических вычислениях $\boldsymbol{\sigma} \equiv \boldsymbol{\mu}$. В этих обозначениях среднюю квадратическую ошибку $\mathbf{m_{ii}}$ определяемой величины, которой приписан номер i, вычисляют по формуле:

$$\mathbf{m_{ii}} = \boldsymbol{\mu}\sqrt{q_{ii}} = \boldsymbol{\mu}\sqrt{\frac{1}{p_{ii}}} \quad , \qquad (7.7)$$

Где p_{ii} - вес определяемой величины, которой приписан номер i.

Значение $\boldsymbol{\mu}$ ошибки единицы веса определяемых величин получают из результатов уравнивания. Такая процедура включена в стандартные программы обработки результатов измерений. На этапе проектирования геодезической сети возникает необходимость оценить ошибки определяемых величин координат пунктов до того, как измерения будут выполнены, то используют значение $\boldsymbol{\mu}$ погрешности единицы веса, полученное ранее на других объектах из наблюдений того же состава, с использованием той же аппаратуры и при реализации аналогичной методики работ. Такую оценку точности называют *предварительной (априорной) оценкой точности*.

Практика обработки результатов измерений показывает, что проблемы создаёт именно определение погрешности единицы веса $\boldsymbol{\mu}$, значение которой, полученное из результатов уравнивания, является, как правило, преуменьшенным. Другими словами, точность определяемых из уравнивания величин получается завышенной. В связи с этим погрешности $\boldsymbol{\mu}$ единицы веса определяемых величин придают значение, полученное на основе опыта предшествующих измерений.

Из практики создания геодезических сетей спутниковым методом известно также следующее. Недиагональные элементы ковариационной матрицы $\mathbf{K}$ всегда меньше элементов, расположенных на главной диагонали. Элементы, расположенные на главной диагонали, имеют значения в несколько единиц, умноженных на 10^{-6}, например, $9{\cdot}10^{-6}$. Это означает, что соответствующее неизвестное получено с ошибкой $3{\cdot}10^{-3}$ метра или 3 миллиметра. Такова обычная величина погрешности в определении координат пункта геодезической сети. При длительных сессиях наблюдений диагональные элементы ковариационной матрицы получаются равными нескольким единицам, умноженным на 10^{-7}.

8.Геометрия геодезической сети и геометрия наблюдений

Повторим, что цель создания опорной геодезической сети состоит в том, чтобы определить координаты пунктов, составляющих эту сеть, и сделать это с возможно более высокой точностью. Координаты пунктов необходимо определять с возможно меньшими ошибками при существующей в текущую эпоху точности измерений. Возможность достижения этой цели определяется формой геодезической сети и геометрией наблюдений, то есть, структурой матрицы $\mathbf{Q}$ обратных весов. Вопрос о геометрии наблюдений и о наивыгоднейших условиях наблюдений применительно к геодезической астрономии поставлен и решён в работе [11] профессора Уралова С.С.

8.1. Понятие геометрического фактора

Значение второго сомножителя $\sqrt{q_{ii}}$ в формуле (7.7) зависит только от формы геодезической сети, от положения наблюдаемых объектов и не зависит от ошибок измерений. Желательно, чтобы вес p_{ii} был бы как можно большим а, следовательно, обратный вес q_{ii} был бы по возможности меньшим. Другими словами, желательно с как можно меньшими потерями «перекачать» высокую точность измеряемых в геодезической сети угловых и линейных величин в точность определяемых координат пунктов геодезической сети. Рассмотрим опять же простейший случай, когда результаты измерений во всей геодезической сети выполнены с одинаковой точностью. Тогда и вес всех результатов измерений одинаков, его принимают равным единице. Есть ли возможность создать геодезическую сеть такой конфигурации, при которой вес и, следовательно, обратный вес определяемых величин координат был бы равен единице?

Если речь идёт о создании плановой геодезической сети наземными методами, такими, как триангуляция, трилатерация и полигонометрия, то ответ на этот вопрос отрицательный. Вес определяемых неизвестных меньше веса результатов измерений. Исключение составляет только геометрия сети, аналогичная ситуации, приведённой на рисунке 2.1. Там погрешность определяемых величин равна погрешности измерения, а, следовательно, вес (и обратный вес) определяемых величин равен весу (обратному весу) измеряемых величин и равен единице. Такую конфигурацию сети, то есть, такие условия наблюдений по всей сети реализовать невозможно. Поэтому неизбежно уменьшение веса координат пунктов, то есть, увеличение погрешностей этих координат. На этом и зиждется, в значительной мере, искусство проектирования геодезической сети, которую создают каким-либо наземным методом. Следует проектировать геодезическую сеть такой конфигурации (с такой геометрией), в которой потеря точности координат определяемых пунктов из-за уменьшения их веса была бы возможно меньшей. Препятствуют этому несколько факторов.

Прежде всего – это необходимость размещать пункты геодезической сети на возвышенностях для обеспечения их взаимной видимости. Природа не всегда в полной мере учитывает интересы геодезистов. Она не позаботилась о том, чтобы разместить возвышенности таким образом, чтобы они представляли собой вершины равносторонних треугольников. Поэтому форма геодезической сети зачастую далека от идеальной в геометрическом смысле. Как написано ранее, форма геодезической сети, создаваемой с использованием системы глобального спутникового позиционирования, не влияет на точность координат определяемых пунктов такой сети. Это обстоятельство является одной из причин того, что спутниковый метод в значительной мере потеснил традиционные наземные методы создания опорных геодезических сетей в данной области деятельности геодезистов.

8.2. Геометрический фактор в спутниковых наблюдениях

Как написано ранее, точность определения координат (разностей координат) пунктов геодезической сети, создаваемой спутниковым методом, не зависит от взаимного расположения этих пунктов. Она зависит от расположения спутников на небосклоне. Другими словами, на точность определяемых координат пунктов влияет не геометрия сети, но геометрия спутниковых наблюдений. Влияние *геометрического фактора* учитывают, используя понятие DOP [7,14]:

$$m_{\text{опр}} = m_{\text{изм}} \cdot (\mathrm{DOP}) . \quad (8.1)$$

В этой формуле $m_{\text{опр}}$ – ошибка определения разности координат пунктов; $m_{\text{изм}}$ - ошибка измерения вторых разностей результатов фазовых измерений [6,12], выраженная в линейной мере. Ошибка измерения вторых разностей в данном случае имеет смысл ошибки μ единицы веса.

DOP – Dilution Of Precision – падение точности, «размывание» точности из-за геометрии наблюдений. Из сравнения формул (7.7) и (8.1) видно, что DOP аналогичен $\sqrt{q_{ii}}$, то есть, корню квадратному из обратного веса определяемой величины разности координат пунктов, и представляет собой *геометрический фактор*.

При работе в кодовом навигационном и в фазовом геодезическом режимах используют несколько видов геометрического фактора DOP: HDOP, VDOP, PDOP, TDOP и GDOP.

HDOP - Horizontal DOP – это геометрический фактор, характеризующий ошибку определения планового местоположения. VDOP - Vertical DOP – это геометрический фактор, характеризующий ошибку определения высоты; PDOP – Position DOP - это геометрический фактор, характеризующий ошибку определения полного местоположения. Эти три разновидности геометрического фактора связаны соотношением:

$$HDOP^2 + VDOP^2 = PDOP^2. \qquad (8.2)$$

TDOP – Time DOP– это геометрический фактор, характеризующий ошибку определения поправки часов приёмника (приёмников) относительно времени спутниковой системы. GDOP – Geometrical DOP – это геометрический фактор, характеризующий ошибку определения полного пространственно-временного положения. Три последних разновидности геометрического фактора связаны соотношением:

$$PDOP^2 + TDOP^2 = GDOP^2. \qquad (8.3)$$

В практике выполнения спутниковых наблюдений для оценки геометрии наблюдений чаще всего используют PDOP. Чем меньше значение этого геометрического фактора, тем лучше геометрия наблюдений. Практика показывает, что при открытом небосклоне, то есть, при отсутствии препятствий вблизи спутниковых приёмников, PDOP имеет значения порядка 1.2 – 1.3. Это очень хорошо, но ситуация ухудшается, если приходится по необходимости всё-таки устанавливать спутниковый приёмник на пункте, вблизи которого имеется препятствие, например, здание. Исходя из опыта работы можно сделать вывод, что при создании опорной геодезической сети значение геометрического фактора PDOP не должно превышать трёх.

PDOP имеет довольно ясный геометрический смысл [13, 6]. Представим пункт наблюдений, из которого направлены на четыре наблюдаемых спутника векторы единичной длины. Если соединить концы векторов, то образуется трёхгранная пирамида. Объём этой пирамиды является величиной, обратной PDOP. Ясно, что чем больше объём пирамиды, тем меньше PDOP, тем точнее определяется местоположение приёмника, установленного на пункте наблюдений. Например, хорошо, если наблюдается спутник вблизи зенита пункта и спутники, находящиеся невысоко над горизонтом и более-менее равномерно распределённые по азимуту. На самом деле, в области приёма антенны приёмника находятся много спутников, порой до девяти-десяти. Приёмник вычисляет и выдаёт на дисплей PDOP для спутников, наиболее удачно в геометрическом смысле расположенных относительно приёмника.

9. Применение матриц в преобразовании координат

Координаты пунктов геодезических сетей, а также координаты векторов, соединяющих эти пункты - координаты векторов баз, выражают в разных системах координат. Для задания координат пунктов глобальной геодезической сети используют практическую реализацию геоцентрической системы координат, которая носит название Международной Земной Референцной Координатной Опоры – International Terrestrial Reference Frame (ITRF). В спутниковой системе GPS Navstar в качестве системы координат используют Всемирную Геодезическую Систему, принятую в 1984 году – World Geodetic System 1984 (WGS84). В спутниковой системе ГЛОНАСС в качестве системы координат используют систему ПЗ90 – Параметры Земли, принятые в 1990 году. В региональных и локальных геодезических сетях используют соответственно региональные и локальные системы координат. Процедуру перевычисления координат пунктов и координат векторов баз из одной системы координат в другую систему координат называют *преобразованием координат*. Если обе эти системы координат имеют одинаковый вид, например, обе являются трёхмерными прямоугольными (декартовыми) системами координат, то процедуру преобразования координат называют *трансформированием координат или* просто *трансформированием*. В процедуре преобразования координат применяют *матрицы вращения*.

9.1. Матрица вращения

Матрица вращения, которую обозначим как $\mathbf{R}$, является *ортогональной матрицей*. По определению [5], ортогональная матрица – это квадратная матрица, которая удовлетворяет условию:

$$\mathbf{R^{-1}} = \mathbf{R^{T}} \quad . \qquad (9.1)$$

В случае ортогональных матриц громоздкая процедура вычисления обратной матрицы сводится к простой процедуре транспонирования. Размерность матрицы $\mathbf{R}$ равна размерности пространства, в котором выполняют преобразование координат – трансформирование. Если трансформирование выполняют в трёхмерном пространстве, то размерность матрицы вращения равна 3×3, если трансформирование выполняют в двухмерном пространстве, то есть на плоскости, то размерность матрицы вращения равна 2×2.

Из сопоставления выражений (6.4) и (9.1) следует, что произведение ортогональной матрицы на эту же транспонированную матрицу равно единичной матрице:

$$\mathbf{R}\mathbf{R^{T}} = \mathbf{R^{T}}\mathbf{R} = \mathbf{E} \quad . \qquad (9.2)$$

9.2. Изменение координат пункта при вращении системы координат

Пусть в трёхмерной прямоугольной системе координат А определён пункт, вектор координат которого имеет вид:

$$\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}_{\mathrm{A}} \quad . \qquad (9.3)$$

Пусть также выполнено вращение системы координат А вокруг одной из осей на угол ω и тем самым получена система координат В. В этом случае вектор координат этого пункта, выраженный в системе координат В, имеет вид:

$$\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B = \mathbf{R}(\omega)\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{A}} . \qquad (9.4)$$

В этом выражении $\mathbf{R(\omega)}$ – матрица вращения; ω – угол вращения. Положительным направлением является вращение против часовой стрелки если смотреть вдоль оси в направлении начала координат O, как показано на рисунке 9.1. Углы ω называют углами Кардано. Вращение вокруг оси X на угол ω_X выполняют с использованием матрицы:

$$\mathbf{R_1}(\omega_x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega_X & \sin\omega_X \\ 0 & -\sin\omega_X & \cos\omega_X \end{pmatrix} . \qquad (9.5)$$

Вращение вокруг оси Y на угол ω_Y выполняют с использованием матрицы:

$$\mathbf{R_2}(\omega_Y) = \begin{pmatrix} \cos\omega_Y & 0 & -\sin\omega_Y \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\omega_Y & 0 & \cos\omega_Y \end{pmatrix} . \qquad (9.6)$$

Вращение вокруг оси Z на угол ω_Z выполняют с использованием матрицы:

$$\mathbf{R_3}(\omega_Z) = \begin{pmatrix} \cos\omega_Z & \sin\omega_Z & 0 \\ -\sin\omega_Z & \cos\omega_Z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad (9.7)$$

Полный поворот системы координат вокруг всех трёх осей описывает матрица:

$$\mathbf{R} = \mathrm{R}_3(\omega_Z)\mathrm{R}_2(\omega_Y)\mathrm{R}_1(\omega_X) . \qquad (9.8)$$

С учётом формулы (9.8) выражение (9.4) принимает вид:

$$\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_B = \mathbf{R}\vec{\mathbf{R}}_{\mathrm{A}} = \mathrm{R}_3(\omega_Z)\mathrm{R}_2(\omega_Y)\mathrm{R}_1(\omega_X)\vec{\mathrm{R}}_{\mathrm{A}} . \qquad (9.9)$$

Порядок расположения матриц в формулах (9.8) и (9.9) изменять нельзя. Графически ситуацию иллюстрирует рисунок 9.1.

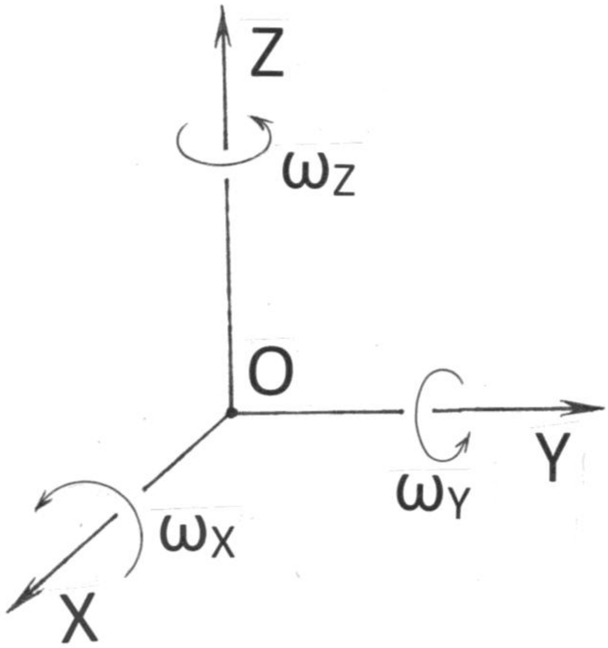

Рисунок 9.1. Вращения вокруг координатных осей.

В большинстве случаев трансформирования углы между одноимёнными координатными осями малы – они не превышают нескольких угловых секунд. Поэтому, опуская величины второго порядка малости, то есть квадраты углов вращения, выраженных в радианах, и произведения этих углов, матрицу полного вращения записывают в приближённом виде:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \omega_Z & -\omega_Y \\ -\omega_Z & 1 & \omega_X \\ \omega_Y & -\omega_X & 1 \end{pmatrix}. \qquad (9.10)$$

Как написано, малые углы вращения ω выражены в радианах. В данном случае результат не зависит от того, в какой последовательности выполнено вращение вокруг осей координат.

9.3. Изменение координат пункта при изменении масштаба и при сдвиге начала координат

В подразделе 6.2 описана процедура вычисления определителя матрицы третьего порядка. Выполнив такое вычисление применительно к матрицам (9.5) – (9.7) можно убедиться в том, что определители этих матриц равны единице. Это означает, что при вращении системы координат длина вектора координат пункта остаётся неизменной. Написанное справедливо и для матрицы (9.10) с точностью до величин второго порядка малости. Другими словами, при переходе, путём вращения, от одной системы координат к другой системе координат масштаб геометрических построений не изменяется. Однако в геодезической практике встречаются случаи, когда этот масштаб требуется изменить, либо определить возможное изменение масштаба геодезической сети. Например, на некоторой части земной поверхности с использованием наземных методов измерений – триангуляции, трилатерации или полигонометрии - была построена геодезическая сеть. Много лет спустя на пунктах этой же сети выполнили измерения с использованием спутниковых геодезических приёмников. Из-за использования принципиально разных приборов и методов измерений может иметь место систематическое относительное «сжатие» или «растяжение» геодезической сети. В относительной мере такое искажение масштаба может составлять 10^{-7} и даже 10^{-6}. В абсолютной мере это означает, что расстояние между пунктами геодезической сети, вычисленное по их координатам, и равное 100 километрам, будет укорочено или удлинено на 10-100 миллиметров. Такая ошибка выходит за пределы инструментальной точности современной измерительной аппаратуры и, следовательно её необходимо учитывать.

По аналогии с выражением (9.4), вектор координат пункта, выраженный в системе A, при переходе в систему B вследствие изменения масштаба имеет вид:

$$\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}_{\mathrm{B}} = (1 + \mathrm{m})\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{A}}\,. \qquad (9.11)$$

В этом выражении величина m представляет собой коэффициент, учитывающий, в относительной мере, разницу масштабов геодезической сети, созданной в системах координат A и B. Значение этого коэффициента может быть нулевым, положительным либо отрицательным.

В геодезической практике встречаются случаи, когда начало координат систем A и B не совпадают, то есть существует сдвиг по всем трём осям начала координат системы B относительно начала координат системы A. Такое произойдёт, например, в следующем случае. При создании старой геодезической сети традиционными наземными методами в качестве исходного использовали некоторый пункт или группу пунктов. Для вновь создаваемой на этом же участке земной поверхности спутниковым методом геодезической сети использовали иной пункт или группу иных пунктов.

По аналогии с выражением (9.4), вектор координат пункта, выраженный в системе A, при переходе в систему B вследствие сдвига начала координат имеет вид:

$$\vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{Z} \end{pmatrix}_{\mathrm{B}} = \vec{\mathbf{R}}_{\mathbf{A}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\delta}\mathbf{R}}\,. \qquad (9.12)$$

В этом выражении $\overrightarrow{\boldsymbol{\delta}\mathbf{R}}$ – это вектор сдвига начала координат, который определяет параллельный перенос начала координат. Другими словами, компоненты этого вектора есть координаты начала системы B в системе A:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\delta}\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \delta\mathrm{X} \\ \delta\mathrm{Y} \\ \delta\mathrm{Z} \end{pmatrix}. \qquad (9.13)$$

В общем случае при переводе вектора координат пункта из системы A в систему B необходимо учитывать все три вида преобразования: разворот, изменение масштаба и сдвиг начала координат.

9.4. Трёхмерное (3-D) трансформирование

В рассматриваемом случае трёхмерное трансформирование – это перевычисление координат вектора, выраженного изначально в декартовой пространственной (трёхмерной) системе координат А, в аналогичную систему координат В с учётом разворота, изменения масштаба и сдвига начала координат. Трёхмерное трансформирование выполняют с использованием формулы Гельмерта, которая объединяет формулы (9.4), (9.11) и (9.12):

$$\overrightarrow{\mathbf{R}_{\mathbf{B}}} = (1+\mathrm{m})\mathbf{R}\overrightarrow{\mathbf{R}_{\mathbf{A}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\delta}\mathbf{R}}\,. \tag{9.14}$$

Для того, чтобы выполнить трёхмерное трансформирование, необходимо определить значения семи *параметров трансформирования*: одного масштабного коэффициента, трёх углов ращения и трёх сдвигов. Эти значения определяют, используя результаты измерений, выполненных методами космической (спутниковой) геодезии на пунктах созданной ранее наземными методами геодезической сети.

Трёхмерное трансформирование применяют, если геодезическая сеть занимает существенную часть поверхности Земли [13]. Примером такой сети является геодезическая сеть России. Если же геодезическая сеть имеет меньшие размеры, например, является сетью города или сетью небольшой страны, по применяют двухмерное трансформирование.

9.5. Двухмерное (2-D) трансформирование

Как написано, двухмерное трансформирование применяют тогда, когда геодезическая сеть расположена на территории конкретного региона или объекта. Это означает, что на практике в подавляющем большинстве случаев используют именно двухмерное трансформирование. Перед выполнением двухмерного трансформирования необходимо преобразовать трёхмерные геодезические декартовы координаты пунктов сети в геодезические эллипсоидальные координаты этих пунктов, а затем преобразовать их в координаты тех же пунктов на плоскости геодезической проекции, например, проекции Гаусса – Крюгера [6,7]. После редуцирования на плоскость геодезической проекции получают координаты пунктов, выраженные в виде двухмерных векторов. Рассмотрим конкретную ситуацию, когда вектор координат пункта, полученный спутниковым методом в системе **WGS84** [7], преобразуют в вектор координат того же пункта, выраженный в некоторой локальной, референцной системе координат.

Компоненты вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}_{\mathbf{ref}}}$ - это координаты пункта созданной ранее геодезической сети на плоскости геодезической проекции. Компоненты вектора $\overrightarrow{\mathbf{r}_{\mathbf{WGS}}}$ - это координаты того же пункта, полученные спутниковым методом и редуцированные на плоскость той же геодезической проекции. Двухмерный вектор координат пункта, полученный в референцной системе координат, и двухмерный вектор координат того же пункта, полученный в WGS84, связаны формулой:

$$\overrightarrow{\mathbf{r}_{\mathbf{ref}}} = (1+\mathrm{m})\mathbf{r}\cdot\overrightarrow{\mathbf{r}_{\mathbf{WGS}}} + \overrightarrow{\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}}\quad. \tag{9.15}$$

В этой формуле m - параметр масштаба плановой геодезической сети. Вектор $\overrightarrow{\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}}$ - это вектор сдвига:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} \quad . \qquad (9.16)$$

Матрица $\mathbf{r}$ - это матрица вращения на малый угол ω_H вокруг оси H, которая принята за некоторую «вертикальную» ось для данного участка земной поверхности:

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & -\omega_H \\ \omega_H & 1 \end{pmatrix} . \qquad (9.17)$$

Таким образом, чтобы выполнить двухмерное трансформирование, необходимо с достаточной точностью знать четыре параметра трансформирования (преобразования): два параметра сдвига, один параметр поворота и один параметр масштаба. Для определения этих четырех неизвестных параметров трансформирования достаточно выполнить спутниковые наблюдения на пунктах, координаты которых известны в референцной системе координат. Программное обеспечение спутниковых приемников включает программу двухмерного трансформирования.

Заключение

В учебном пособии в простейшем, по мнению авторов, виде дано понятие матрицы применительно к параметрическому способу уравнивания результатов измерений. Возвращаясь к некоторым поставленным в тексте учебного пособия вопросам, напишем следующее.

В процессе производственной деятельности геодезист измеряет угловые и линейные величины. Эти величины физически существуют и их значения не зависят от выбранной системы координат. В ходе выполнения измерений геодезист вообще может не задумываться о том, какую именно систему координат он будет использовать для получения окончательного результата в виде координат пунктов опорной геодезической сети или в виде разностей этих координат. Но как только геодезист приступит к обработке результатов измерений – выбор конкретной системы координат становится его первоочередной задачей.

Геодезист измеряет те и только те угловые и линейные величины, которые функционально связаны с определяемыми величинами: с координатами пунктов геодезической сети и/или, чаще всего, с разностями координат этих пунктов. Корректным и полным результатом работы геодезиста являются полученные им измеряемые величины и определённые им координаты (разности координат) пунктов геодезической сети, сопровождённые оценкой точности. Мерой точности измеренной величины является её средняя квадратическая ошибка.

Точность определения совокупности неизвестных, таких, как, опять же, координаты множества пунктов геодезической сети, характеризует ковариационная матрица $\mathbf{K}$. Геометрию геодезической сети и геометрию наблюдений характеризует матрица обратных весов $\mathbf{Q}$. Именно теория матриц позволяет наиболее эффективным и исчерпывающим образом изложить, понять и глубоко усвоить практикуемые в геодезии понятия и определения.

В ходе работы над учебным пособием авторы стремились к тому, чтобы содержание учебного пособия было по возможности кратким, а восприятие содержания этого учебного пособия было по возможности лёгким для читателя. В частности, авторы сделали попытку, за счёт математической строгости изложения, упростить структуру материала. В полной мере этого сделать не удалось. В частности, упоминание о ковариационной матрице встречается в начале текста учебного пособия, а понятие ковариационной матрицы дано ближе к концу текста. В связи с этим авторы надеются, что читатель найдёт в себе желание и силы прочитать учебное пособие не менее двух раз. Авторы надеются также, что учебное пособие будет скромным, но полезным дополнением к существующим методическим разработкам по высшей математике и по теории математической обработки результатов геодезических измерений.

Литература

1. Дроздов Н.Д. Теория матриц и решение систем линейных уравнений. Конспект лекций по курсу «Линейная алгебра». Москва. МИИГАиК. 1967 год. 68 с.
2. Дроздов Н.Д. Евклидовы пространства и линейные преобразования. Конспект лекций по курсу «Линейная алгебра». Москва. МИИГАиК. 1968 год. 53 с.
3. Дроздов Н.Д. Линейная алгебра в теории уравнивания измерений. Москва. Недра. 1972. 214 с.
4. Нейман Ю.М. К вопросу о математической обработке разнородных измерений. Москва, Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъёмка, №2, 2008, с. 7-21.
5. Боревич З.И. Определители и матрицы. Москва. Наука. 1970 год. 199 с.
6. Большаков В.Д., Деймлих Ф., Голубев А.Н., Васильев В.П. Радиогеодезические и электрооптические измерения. Москва. Недра. 1985 год. 303 с.
7. Шануров Г.А., Мельников С.Р. Геотроника. Учебное пособие. Москва. МИИГАиК. 2001 год. 136 с.
8. Купер Дж., Макгиллем К. Вероятностные методы анализа сигналов и систем. Москва. Мир. 1984 год. 376 с.
9. Свешников А.А. Прикладные методы теории случайных функций. Ленинград. Судпромгиз. 1961 год. 252 с.
10. Вентцель А.Д. Курс теории случайных процессов. Москва. Наука. 1975 год. 320 с.
11. Маркузе Ю.И., Бойко Е.Г., Голубев В.В. Геодезия. Вычисление и уравнивание геодезических построений. Москва. Картгеоцентр и Картгеоиздат. 1994 год.
12. Уралов С.С. Курс геодезической астрономии. Москва. Недра. 1980 год.
13. B. Hofmann-Wellenhoff, H. Lichtenegger, J. Collins. Global Positioning System. Theory and Practice. Second eddition. Springer-Verlag. Wien. New York. p. 326.
14. Phillips A.H. Geometrical determination of PDOP. Navigation (USA), 1984-1985, 31, #4, pp. 329-337.