Министерство науки
и высшего образования
Российской Федерации

Московский государственный университет геодезии и картографии (МИИГАиК)

Е.А. Гонжа , К.И. Лоссов , М.Е. Чанга

Функции нескольких переменных

методические указания по выполнению
контрольной работы № 5 по специальности
21.05.01 «Прикладная геодезия», направлениям подготовки
21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»,
21.03.02 «Землеустройство и кадастры»
заочная форма обучения

МОСКВА 2024

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный университет геодезии и картографии» (МИИГАиК)

Е.А. Гонжа , К.И. Лоссов , М.Е. Чанга

Функции нескольких переменных

методические указания по выполнению контрольной работы № 5
по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия»,
направлениям подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование»,
21.03.02 «Землеустройство и кадастры»
заочная форма обучения

МИИГАиК
Москва
2024

УДК 517.5
ББК 22.16
Г65

Рецензенты:
д-р пед. наук, доцент **М.В. Литвиненко** (МИИГАиК)
к.ф-м.н., доцент **Е.С. Крупицын** (МПГУ)

Гонжа, Евгений Афиногенович
Г65 Функции нескольких переменных / Е.А. Гонжа , К.И. Лоссов , М.Е. Чанга : методические указания по выполнению контрольной работы № 5 по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия», направлениям подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование», 21.03.02 «Землеустройство и кадастры», заочная форма обучения. — Москва : МИИГАиК, 2024. — 15 с.

Учебно-методическое пособие по дисциплине «Математика». Методические указания по выполнению контрольной работы № 5 «Функции нескольких переменных» для студентов заочной формы обучения по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия» и направлениям подготовки 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование», 21.03.02 «Землеустройство и кадастры».

УДК 517.5
ББК 22.16

Электронное учебное издание

Гонжа Евгений Афиногенович, Лоссов Константин Иванович, Чанга Марис Евгеньевич
Функции нескольких переменных
Публикуется в авторской редакции

Рассмотрено и одобрено на заседании
Редакционно-издательского совета МИИГАиК
2024 г.
Электронная версия учебно-методического пособия размещена
на сайте МИИГАиК www.miigaik.ru

Оглавление

1 Требования к знаниям и умениям студента по результатам самостоятельной учебно-познавательной работы

Согласно учебному плану для студентов 2-го курса заочной формы обучения по направлениям подготовки 21.03.02 «Землеустройство и кадастры», 21.03.03 «Геодезия и дистанционное зондирование» и по специальности 21.05.01 «Прикладная геодезия» предусматривается выполнение 3-х контрольных работ, одна из которых (работа №5) — это «Функции нескольких переменных», по курсу «Математика». По результатам самостоятельной учебно-познавательной деятельности в ходе выполнения контрольной работы студент должен:

Знать: теоретические сведения по всем вопросам математики, которые рассматриваются в контрольной работе №5. С этой целью необходимо изучить следующие темы:

- частные производные функций нескольких переменных;
- дифференциал функции нескольких переменных;
- градиент;
- производная по направлению;
- дифференцирование функций, заданных неявно;
- касательная плоскость к поверхности;
- экстремум функции нескольких переменных.

В процессе изучения данных тем следует использовать рекомендуемую литературу и ознакомиться с вопросами для самоконтроля (ответить на них).

Уметь: решать задачи, относящиеся к разделам математики контрольной работы №5. С этой целью полезно разобрать решение задач демонстрационного варианта данного методического пособия.

2 Условия допуска к защите

Работа **допущена к защите**	Студент приносит распечатанную или отсканированную работу на экзамен
Работа **допущена к защите с исправлениями**	Сделав исправления в работе по указанию преподавателя, студент не присылает повторно работу на проверку, а приносит в период сессии в распечатанном виде для последующей проверки преподавателем
Работа **не допущена к защите**	Сделав исправления в работе по указанию преподавателя, студент присылает работу на проверку повторно до тех пор, пока работа не будет допущена к защите без исправлений или с незначительными исправлениями

3 Методические указания по выполнению контрольной работы

В контрольной работе студент решает все те задачи, номера которых оканчиваются на ту же цифру, на которую оканчивается номер учебного шифра. Например, если номер шифра оканчивается на цифру 5, то студент должен решить задачи 5, 15, 25 и т.д. Если номер шифра оканчивается на 0, то студент должен решить задачи 10, 20, 30 и т.д.

При выполнении контрольной работы студент должен изложить подробное решение всех задач своего варианта, желательно, в той же последовательности, как они приводятся в задании. Содержание решения задачи должно включать условие задачи, пошаговый ход решения, при необходимости, демонстрационный чертеж.

Работы должны быть представлены не менее чем за 2 недели до начала сессии.

4 Методические указания по оформлению контрольной работы

Каждая работа выполняется в отдельном файле «от руки» с последующим сканированием и сохранением в pdf. Работы в других форматах к проверке не допускаются. Чертежи к работе также выполняются от руки.

5 Задания для контрольной работы № 5

Тема 2: Функции нескольких переменных

Задачи 1–10

В задачах № 1–10 вычислите частные производные данных функций:

1. $z=\frac{1}{\sqrt{3x^3+2x-5y+1}}$.
2. $z=\sqrt{x-2}\cdot e^{\frac{2x}{y}}$.
3. $z=\ln(xy^2-\cos y)$.
4. $z=ctg^3\frac{y-2}{x}$.
5. $z=\sin(x^3)\cdot arctg(xy)$.
6. $z=\arcsin(2x+\sqrt{x^2+y^2})$.
7. $z=y\cdot arccos\sqrt{2x+y}$.
8. $z=\frac{1}{arcctg(2x+\sqrt{2xy})}$.
9. $z=\ln(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{y}})$.
10. $z=\sqrt{y}\cdot 3^{tg\sqrt{x}}$.

Задачи 11–20

В задачах № 11–20 вычислите производные неявно заданных функций:

11. $x^3+y^3=\sqrt{xy}, \frac{dy}{dx}=?$
12. $x^2-3xy+sinxz=0, \frac{\partial z}{\partial x}=?, \frac{\partial z}{\partial y}=?$
13. $e^{xy}=tgx, \frac{dy}{dx}=?$
14. $\sqrt{yz}-xtgz=0, \frac{\partial z}{\partial x}=?, \frac{\partial z}{\partial y}=?$
15. $\ln(x+1)=\frac{y}{x}, \frac{dy}{dx}=?$

16. $\ln(y+z) - xz = 0, \frac{\partial z}{\partial x} = ?, \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

17. $x^3 y = e^{x+3y}, \frac{dy}{dx} = ?$

18. $\cos(3xz - 1) + \sin(2yz) = 0, \frac{\partial z}{\partial x} = ?, \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

19. $\cos(y+1) = \arcsin(2xy + 2), \frac{dy}{dx} = ?$

20. $arcsin(yz - 1) - arctg(xz) = 0, \frac{\partial z}{\partial x} = ?, \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

Задачи 21–30

В задачах № 21–30 вычислите приближенное значение следующей функции в точке A, заменяя приращение функции ее дифференциалом:

21. $z = x^3 \cdot \sqrt{y}$, $A(1{,}02;\ 0{,}95)$.
22. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A(1{,}06;\ 0{,}93)$.
23. $z = x^2 y^2$, $A(0{,}97;\ 1{,}03)$.
24. x^y, $A(1{,}02;\ 0{,}98)$.
25. $z = \ln\,(2\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} - 1)$, $A(0{,}96;\ 1{,}04)$.
26. $z = 2e^{xy}$, $A(0{,}96;\ 1{,}06)$.
27. $z = x^2 + y^3$, $A(1{,}04;\ 0{,}98)$.
28. $z = 2\sqrt{xy}$, $A(1{,}03;\ 0{,}96)$.
29. $z = xe^{2y}$, $A(1{,}04;\ 0{,}94)$.
30. $z = x^2 + 4xy$, $A(0{,}98;\ 1{,}04)$.

Задачи 31–40

В задачах № 31–40 найдите производную функции $u(x, y, z)$ в точке A по направлению к точке B.

Задача	$u(x, y, z)$	A	B
31	$y\sqrt{x^2 + z^2}$	(3;4;4)	(4;6;6)
32	$\mathrm{arctg}(x + y^2 z)$	(1;1;1)	(2;5;9)
33	$\sqrt{x^2 + 2yz}$	(3;4;2)	(5;7;8)
34	$\ln(2x^2 + y^2 + z^2)$	(1;2;2)	(9;3;6)

35	$xy\sqrt{y^2 + z^2}$	(2;3;4)	(5;9;6)
36	$\mathrm{arctg}(x - y^2 + z)$	(2;2;4)	(4;8;7)
37	$\sqrt{2y^2 + xz}$	(3;1;7)	(5;3;8)
38	$\mathrm{arctg}(xy + z)$	(1;1;2)	(9;5;3)
39	$\sqrt{x^2 + y^2z^2}$	(3;2;2)	(9;4;5)
40	$\ln(x^2 + y^2z^2)$	(2;1;1)	(5;3;7)

Задачи 41–50

В задачах № 41–50 составьте уравнение касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ в точке A.

Задача	$F(x, y, z)$	A
41	$2z^3 - x^2z + 2xy^2 - 12$	(2;1;2)
42	$x^2 - 3xy + 2yz^2 + 12$	(2;4;1)
43	$3z^2 + 2yz - xy^2 - 53$	(3;1;4)
44	$2xy^2 + 3yz - z^2 - 41$	(4;2;3)
45	$x^2y - 5xz + yz^2 + 25$	(5;2;5)
46	$2y^3 - 2xz + xz^2 - 32$	(2;1;5)
47	$2x^2 - xyz + yz^2 - 16$	(4;4;2)
48	$x^3 - 2xz + y^2z - 11$	(1;2;5)
49	$2x^2y + yz - xz^2 - 37$	(2;5;3)
50	$3y^2 + 2xy + xz^2 - 21$	(3;1;2)

Задачи 51–60

В задачах № 51–60 исследуйте функцию $z(x, y)$ на экстремум.

Задача	$z(x, y)$
51	$-3x^2 - 2xy - y^2 + 10x + 6y$
52	$2x^2 + 2xy + 5y^2 - 14x - 34y$

53	$-6x^2 - 8xy - 3y^2 + 32x + 22y$
54	$2x^2 + 6xy + 5y^2 - 24x - 38y$
55	$-6x^2 - 16xy - 19y^2 + 28x + 54y$
56	$5x^2 - 2xy + 2y^2 - 8x - 2y$
57	$-3x^2 + 2xy - y^2 + 6x + 2y$
58	$5x^2 + 2xy + 2y^2 - 14x - 10y$
59	$-3x^2 + 10xy - 11y^2 - 2x + 14y$
60	$x^2 + 2xy + 5y^2 - 6x - 14y$

6 Вопросы для самоконтроля по теме:

«Функции нескольких переменных»

1. Функции нескольких переменных. Область определения.
2. Предел функции нескольких переменных.
3. Непрерывность функции нескольких переменных.
4. Дифференцируемость. Частные производные функции нескольких переменных.
5. Дифференциал функции нескольких переменных. Инвариантность формы полного дифференциала. Приближенные вычисления.
6. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл дифференциала.
7. Градиент функции нескольких переменных. Геометрический смысл градиента.
8. Производная по направлению, ее свойства и вычисление.
9. Дифференцирование сложной функции.
10. Частные производные и дифференциалы высших порядков.
11. Формула Тейлора.
12. Неявные функции. Теорема существования. Дифференцирование неявных функций.

Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие.
Достаточные условия.

7 Демонстрационный вариант контрольной работы № 5

Задача 1. Вычислить частные производные следующей функции:

а) $z = arcsin^2(\sqrt{x}y)$,

б) $z = lny \cdot e^{x^2y}$.

Решение: а) При вычислении частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ считаем, что переменная y является постоянной величиной. Используя таблицу производных и применяя правила дифференцирования, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2\arcsin(\sqrt{x}y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - xy^2}} \cdot \frac{y}{2\sqrt{x}}$$

При вычислении частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ считаем, что переменная x является постоянной величиной. Аналогично получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2\arcsin(\sqrt{x}y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - xy^2}} \cdot \sqrt{x}$$

б) При вычислении частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$ нужно помнить, что если y является постоянной величиной, то и lny тоже постоянная величина. Тогда:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = lny \cdot e^{x^2y} \cdot 2xy$$

При вычислении частной производной $\frac{\partial z}{\partial y}$ нужно воспользоваться формулой для нахождения производной произведения функций. Получим:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (lny)'e^{x^2y} + lny(e^{x^2y})' = \frac{1}{y}e^{x^2y} + lny \cdot e^{x^2y} \cdot x^2$$

Задача 2. Найти производные неявно заданной функции:

а) $x - 3y = tg(\sqrt{x}y), \frac{dy}{dx} = ?$

б) $x^2y + yz = \sin(xz), \frac{\partial z}{\partial x} = ?, \frac{\partial z}{\partial y} = ?$

Решение: а) Если функция $y(x)$ задается неявно уравнением вида $F(x, y(x)) = 0$, то искомая производная находится по формуле:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

В данном примере $F(x, y) = x - 3y - tg(\sqrt{x}y)$ и

$$\partial F/\partial x = 1 - \frac{1}{cos^2(\sqrt{x}y)} \cdot \frac{y}{2\sqrt{x}}$$

$$\partial F/\partial y = -3 - \frac{1}{cos^2(\sqrt{x}y)} \cdot \sqrt{x}$$

По формуле находим:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 - \frac{1}{cos^2(\sqrt{x}y)} \cdot \frac{y}{2\sqrt{x}}}{-3 - \frac{1}{cos^2(\sqrt{x}y)} \cdot \sqrt{x}}$$

б) Если функция $y(x)$ задается неявно уравнением вида $F(x, y, z(x, y)) = 0$, то искомые производные находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

В данном примере $F(x, y, z(x, y)) = x^2y + yz - \sin(xz)$ и:

$\partial F/\partial x = 2xy - \cos(xz) \cdot z$

$\partial F/\partial y = x^2 + z$

$\partial F/\partial z = y - \cos(xz) \cdot x$

По формулам находим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy - \cos(xz) \cdot z}{y - \cos(xz) \cdot x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2 + z}{y - \cos(xz) \cdot x}$$

Задача 3. Вычислить приближенное значение следующей функции в точке A, заменяя приращение функции ее дифференциалом.

$z = \sqrt{x} + e^{x\sqrt{y}}$, A(0,97; 0,96).

Решение: Запишем формулу для приближенных значений функции:

$$z(x, y) \approx z(x_0, y_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y,$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$.

Находим производные заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + e^{x\sqrt{y}} \cdot \sqrt{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x\sqrt{y}} \cdot \frac{x}{2\sqrt{y}}$$

Для заданного примера $x = 0{,}97$, $y = 0{,}96$. Выбираем $x_0 = 1, y_0 = 1$. Тогда:

$\Delta x = 0{,}97 - 1 = -0{,}03$, $\Delta y = 0{,}96 - 1 = -0{,}04$,

$z(x_0, y_0) = 1 + e \approx 1 + 2{,}7182 = 3{,}7182$,

$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{1}{2} + e \approx 0{,}5 + 2{,}7182 = 3{,}2182$,

$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = e \cdot \frac{1}{2} \approx 0{,}5 \cdot 2{,}7182 = 1{,}3591$.

Теперь вычисляем:

$z(0{,}97, 0{,}96) \approx 3{,}7182 + 3{,}2182 \cdot (-0{,}03) + 1{,}3591 \cdot (-0{,}04) = 3{,}56729$.

Задача 4. Найдите производную функции $u(x, y, z) = y^2 + \sqrt{x^2 + z^2}$ в точке $A(1;2;0)$ по направлению к точке $B(3;0;1)$.

Решение: Вначале найдем частные производные функции $u(x, y, z)$, пользуясь правилами дифференцирования:

$$u'_x(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}};\ u'_y(x, y, z) = 2y;\ u'_z(x, y, z) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}}.$$

Теперь подставим сюда координаты точки A, а именно $x = 1, y = 2, z = 0$:

$$u'_x(A) = 1;\ u'_y(x, y, z) = 4;\ u'_z(x, y, z) = 0.$$

Таким образом, находим градиент функции в точке A: $\overrightarrow{grad}\, u(A) = (1; 4; 0)$.

Найдем теперь координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, вычитая координаты точек конца и начала вектора:

$$\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 0 - 2; 1 - 0) = (2; -2; 1),$$

а длина этого вектора есть:

$$AB = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$$

Наконец, вычислим искомую производную по направлению как скалярное произведение градиента функции в точке A и единичного вектора направления к точке B:

$$u'_{\overrightarrow{AB}}(A) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{grad}\, u(A)}{AB} = \frac{2 \cdot 1 + (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 0}{3} = -2.$$

Ответ: -2.

Задача 5. Составьте уравнение касательной плоскости к поверхности $xy^2 + xz + yz^2 - 5 = 0$ в точке A(2;1;1).

Решение: Найдем частные производные функции $F(x, y, z) = xy^2 + xz + yz^2 - 5$:

$$F'_x(x, y, z) = y^2 + z;\ F'_y(x, y, z) = 2xy + z^2;\ F'_z(x, y, z) = x + 2yz.$$

Подставляя вместо переменных координаты точки A, вычислим градиент функции в этой точке:

$$\overrightarrow{grad}\, F(A) = (2; 5; 4),$$

который и будет нормальным вектором искомой касательной плоскости и направляющим вектором нормали к поверхности. Теперь мы можем записать уравнение плоскости, проходящей через точку A и имеющей заданный нормальный вектор:

$$2(x - 2) + 5(y - 1) + 4(z - 1) = 0,$$

откуда, раскрывая скобки, получим искомое уравнение касательной плоскости

$$2x + 5y + 4z - 13 = 0.$$

Ответ: $2x + 5y + 4z - 13 = 0$.

Задача 6. Исследуйте функцию $z(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ на экстремум.

Решение: Вначале найдем частные производные исследуемой функции:

$$z'_x(x, y) = 3x^2 - 3y;\ z'_y(x, y) = 3y^2 - 3x.$$

Точки экстремума обязательно являются критическими точками функции, то есть такими, где частные производные либо не существуют, либо обращаются в нуль. Найдем критические точки нашей функции. Поскольку ее частные производные существуют во всей плоскости, то нужно найти точки, в которых они обе равны нулю, то есть решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Выполняя равносильные преобразования, получим:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x^3 - 1) = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения находим, что x может быть равно нулю или единице. Таким образом, мы получили две критические точки: $M_1(0; 0), M_2(1; 1)$.

Теперь исследуем каждую из этих точек на экстремум. Для этого необходимо вычислить вторые производные исследуемой функции:

$$z''_{xx}(x, y) = 6x;\ z''_{xy}(x, y) = -3;\ z''_{yy}(x, y) = 6y.$$

Подставляя координаты точки M_1, получим:

$$A = z''_{xx}(M_1) = 0;\ B = z''_{xy}(M_1) = -3;\ C = z''_{yy}(M_1) = 0.$$

Поскольку величина $\Delta = AC - B^2 = -9$ меньше нуля, точка M_1 не является точкой экстремума исследуемой функции.

Аналогично исследуем точку M_2:

$$A = z''_{xx}(M_2) = 6;\ B = z''_{xy}(M_2) = -3;\ C = z''_{yy}(M_2) = 6.$$

Величина $\Delta = AC - B^2 = 27$ положительна, при этом A также положительна, следовательно, точка M_2 является точкой минимума исследуемой функции (при отрицательном A это была бы точка максимума).

Ответ: минимум в точке $(1; 1)$.

8 Рекомендуемая литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс. М.: Айрис-Пресс, 2011. 606 с (и др. издания).
2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1. М.: АСТ. Оникс, 2009. 304 с (и др. издания).
3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Интеграл-пресс, 2009. 416 с. (и все издания).
4. Лунгу К.Н. Сборник задач по высшей математике (1 часть), М., Айрис-Пресс, 2017. 576 с.
5. Ефимов А.В., Каракулин А.Ф., Коган С.М. и др. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. (ч. 2), М. Изд-во Физико-математической литературы, 2001. 432 с.