

На правах рукописи

Клыпин Игорь Андреевич

**РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКИ
ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ СЕТЕЙ
В РАЗНЫХ СИСТЕМАХ КООРДИНАТ**

Специальность 25.00.32 — Геодезия

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата технических наук

Москва — 2011

Работа выполнена на кафедре геодезии Московского государственного университета геодезии и картографии (МИИГАиК)

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Маркузе Юрий Исидорович

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Яшкин Станислав Николаевич

кандидат технических наук, доцент
Калинова Елена Владимировна

Ведущая организация: Московский государственный университет
путей сообщения (МИИТ)

Защита диссертации состоится «___» _____ 2011 года в ____ часов на заседании диссертационного совета Д.212.143.03 при Московском государственном университете геодезии и картографии (МИИГАиК) по адресу: 105064, г. Москва, Гороховский пер., 4 (Зал заседаний Учёного совета).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Московского государственного университета геодезии и картографии.

Автореферат разослан «___» _____ 2011 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета

Климков Ю.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Построение геодезических сетей основано на линейных, угловых и спутниковых измерениях, но чаще всего на их комплексном использовании, когда традиционные геодезические методы сочетаются с новейшими спутниковыми технологиями. Кроме того, в прикладной геодезии очень часто геодезические сети строятся как самостоятельные, а координаты их пунктов определяются в местной системе координат. Особенно актуально это для больших и быстро развивающихся городов, когда требуется координаты всех имеющихся на обширной территории пунктов привести как можно более в короткие сроки к единой системе координат. При этом часто возникает необходимость объединения геодезических сетей, построенных в разных системах координат, что, в свою очередь, требует развития и совершенствования методов математической обработки геодезических сетей, построенных в разных системах координат.

Цель диссертации — разработка алгоритма математической обработки геодезических сетей, построенных в разных системах координат, на основе современных компьютерных технологий.

Задачи исследования:

1. Обзор ситуации и анализ существующих подходов к математической обработке геодезических сетей, методов и задач уравнительных вычислений;
2. Разработка алгоритма уравнивания и объединения геодезических сетей, построенных в разных системах координат;
3. Моделирование геодезических сетей, построенных в разных системах координат, и исследование на их основе данного алгоритма.

Научная новизна работы заключается в следующем:

1. Разработан алгоритм совместного уравнивания геодезических сетей на основе модифицированного способа условий с дополнительными неизвестными, метода сопряжённых градиентов с применением формул рекуррентного уравнивания;

2. Выполнено исследование по использованию исходной и линеаризованной формулы перехода из одной системы координат в другую. Исследование показало, что линеаризация не оказывает существенного влияния на точность определения координат.

Практическая ценность работы состоит в том, что разработанный алгоритм позволяет выполнять объединение геодезических сетей, построенных в разных системах координат, с контролем грубых ошибок измерений и оценкой точности параметров преобразования.

Апробация работы. Основные выводы и положения диссертационной работы докладывались автором в 2008–2010 г.г. на:

- 63-ей научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных МИИГАиК (2-3 апреля 2008 года);
- 64-ой юбилейной научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных МИИГАиК, посвящённой 230-ой годовщине со дня его основания (7-8 апреля 2009 года);
- 65-ой научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых учёных МИИГАиК, посвящённой 65-летию победы в Великой Отечественной войне (6-7 апреля 2010 года).

Публикации. Содержание и результаты диссертационной работы освещены в 3 статьях, из них 2 — в издании, рекомендованном ВАК по специальности диссертации.

Объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и приложений. Общий объём работы составляет 90 страниц машинописного текста, включая 17 таблиц, 6 рисунков и 4 приложения. Список использованных источников включает в себя 75 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** показана актуальность темы, сформулированы цель работы, раскрыта её научная новизна и практическая ценность.

В **главе 1 «Обзор ситуации, методов и задач математической обработки геодезических построений»** приводятся сведения о современном состоянии государственных геодезических систем координат в России. Показано, что, несмотря на создание государственной геодезической сети ФАГС и ВГС, которая реализует общеземную систему координат СПК-2005 (пространственную), последняя остаётся фактически недоступной для рядового потребителя.

Показано, что, так как трансформирование координат пунктов спутниковых и наземных сетей с использованием опубликованных на текущий момент параметров преобразования не удовлетворяет практическим требованиям, целесообразно выполнять совместное уравнивание геодезических сетей с определением параметров преобразования.

При этом для преобразования координат из одной системы в другую, используется формула, которую можно представить в виде исходной системы связи для идентичного пункта i как

$$\mathbf{T}_i = \mathbf{a}_1 + (1 + m)\mathbf{P}\mathbf{S}_i, \quad (1)$$

где m — разница в линейных масштабах систем координат; матрица \mathbf{P} содержит в себе малые углы поворота и переводит координаты

спутниковых построений в систему координат наземной геодезической сети:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon_z & -\varepsilon_y \\ -\varepsilon_z & 1 & \varepsilon_x \\ \varepsilon_y & -\varepsilon_x & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Для каждой точки i векторы \mathbf{T}_i и \mathbf{S}_i равны

$$\mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}_T \text{ и } \mathbf{S}_i = \begin{pmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{pmatrix}_S, \quad (3)$$

но относятся к системам координат наземной (\mathbf{T}) и спутниковой (\mathbf{S}) геодезических сетей соответственно.

Вектор \mathbf{a}_1 постоянен для всех точек и составлен из трёх параметров сдвига:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

представляющих собой, по сути, координаты начала системы координат, в которой выполнены наземные геодезические построения, в системе координат, в которую были переведены координаты пунктов спутниковых построений.

Отмечено, что взаимные сдвиги систем координат наземных и спутниковых сетей могут быть достаточно существенными из-за ошибки определения геоцентрических координат начальной точки спутниковой сети, а также выбора референц-эллипсоида и из-за локальных деформаций, присущих наземным сетям.

Далее формулируются современные задачи уравнительных вычислений:

- уравнивание с учётом ошибок исходных данных при построении геодезических сетей в несколько стадий или уравнивании большой сети постепенным её наращиванием;

- уравнивание с контролем грубых ошибок измерений;
- уравнивание с учётом дополнительных неизвестных (например, при анализе деформаций инженерных сооружений и движений земной коры, при определении параметров преобразования и перехода из одной системы координат в другую, при учёте систематических ошибок и т.д.);
- обеспечение устойчивости вычислительного процесса, особенно в случаях ограниченного числа пунктов, когда вместе с вычислением поправок в приближённо известные величины необходимо определять также параметры преобразования;
- и ряд других, не менее важных задач.

Рассмотрены современные методы уравнивания: способ условий с дополнительными неизвестными и рекуррентный способ.

Для способа условий с дополнительными неизвестными

$$\varphi(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = 0, \quad (5)$$

где \mathbf{y} — вектор измерений,

\mathbf{x} — вектор дополнительных неизвестных,

показана возможность контроля грубых ошибок измерений, если вектор $\mathbf{X}^{(0)}$ приближённых значений дополнительных неизвестных представить в виде функции общего вида

$$\mathbf{X}^{(0)} = f(\mathbf{y}) \quad (6)$$

вектора измерений \mathbf{y} .

При таком подходе математическое ожидание вектора невязок будет равно нулю, а обратная весовая матрица \mathbf{Q}_w будет определяться как

$$\mathbf{Q}_w = (\mathbf{B} \quad \boldsymbol{\beta}) \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} & \mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\gamma}^T \\ \boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}^{-1} & \boldsymbol{\gamma}\mathbf{P}^{-1}\boldsymbol{\gamma}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{B}^T \\ \boldsymbol{\beta}^T \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{B} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{X}^{(0)})}{\partial \mathbf{y}}, \quad \boldsymbol{\beta} = \frac{\partial \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{X}^{(0)})}{\partial \mathbf{X}^{(0)}}, \quad (8)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}} \mathbf{X}^{(0)}, \quad (9)$$

а сам вектор невязок определяется согласно

$$\mathbf{W} = \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{X}^{(0)}). \quad (10)$$

Контроль грубых ошибок по невязкам будет выполняться как

$$W_{j_{\text{доп.}}} = \pm t \sigma_0 \sqrt{Q_{Wjj}}. \quad (11)$$

Для рекуррентного уравнивания, разработанного проф. Маркузе Ю.И., приведены основные формулы

$$\mathbf{Q}_i = \mathbf{Q}_{i-1} - \mathbf{Z}_i^T \mathbf{N}_i^{-1} \mathbf{Z}_i, \quad (12)$$

$$\mathbf{Z}_i^T = \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{A}_i^T, \quad (13)$$

$$\mathbf{N}_i = \mathbf{P}_i^{-1} + \mathbf{A}_i^T \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{A}_i = \mathbf{P}_i^{-1} + \mathbf{Z}_i^T \mathbf{A}_i, \quad (14)$$

а также их частный случай, когда учитывается только одно некоррелированное с другими измерение:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Z}_i^T &= \mathbf{Q}_{i-1} \mathbf{a}_i^T; \\ \mathbf{N}_i &= \frac{1}{\mathbf{p}_i} + \mathbf{a}_i \mathbf{Z}_i^T; \\ \mathbf{N}_i^{-1} &= \frac{1}{\mathbf{N}_i}. \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Перечислены преимущества данного способа:

- включение и исключение измерений из уже уравненной сети;

- определение обратной весовой матрицы неизвестных не требует составления нормальных уравнений;
- контроль грубых ошибок измерений и исходных данных.

Также рассмотрен метод сопряжённых градиентов при решении систем линейных уравнений вида

$$\mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{X} = \mathbf{F}, \quad (16)$$

где \mathbf{C} — положительно определённая матрица.

Решение в таком случае находится по следующей последовательности формул:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_0 &= \mathbf{F}, \\ \mathbf{s}_1 &= \mathbf{r}_0, \\ \mathbf{r}_i &= \mathbf{r}_{i-1} + a_i \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{s}_i, \\ a_i &= \frac{(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1})}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{s}_i)} = \frac{(\mathbf{s}_i, \mathbf{r}_{i-1})}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{s}_i)}, \\ \mathbf{s}_{i+1} &= \mathbf{r}_i + b_i \mathbf{s}_i, \\ b_i &= \frac{(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_i)}{(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{r}_{i-1})} = \frac{(\mathbf{r}_i, \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{s}_i)}{(\mathbf{s}_i, \mathbf{C}^T \mathbf{C} \mathbf{s}_i)}. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

При этом значение вектора \mathbf{X} уточняется на каждом шаге итерации по формуле

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^m a_i \mathbf{s}_i. \quad (18)$$

Теоретически точное значение вектора приближённых значений параметров преобразования получается после числа итераций, равного числу t неизвестных.

Преимуществами такого подхода являются выполнение вычислительных операций только с отличными от нуля величинами, обеспечение устойчивости вычислительного процесса, а также возможность нахождения решения в случаях, когда для

линеаризованного варианта определитель системы нормальных уравнений равен нулю.

В главе 2 «Разработка алгоритма уравнивания и объединения геодезических сетей» предлагается вариант структуры алгоритма совместной обработки геодезических измерений, вычисления в котором определяются автоматически, исходя из имеющихся данных. Структура алгоритма представлена на рис. 1.

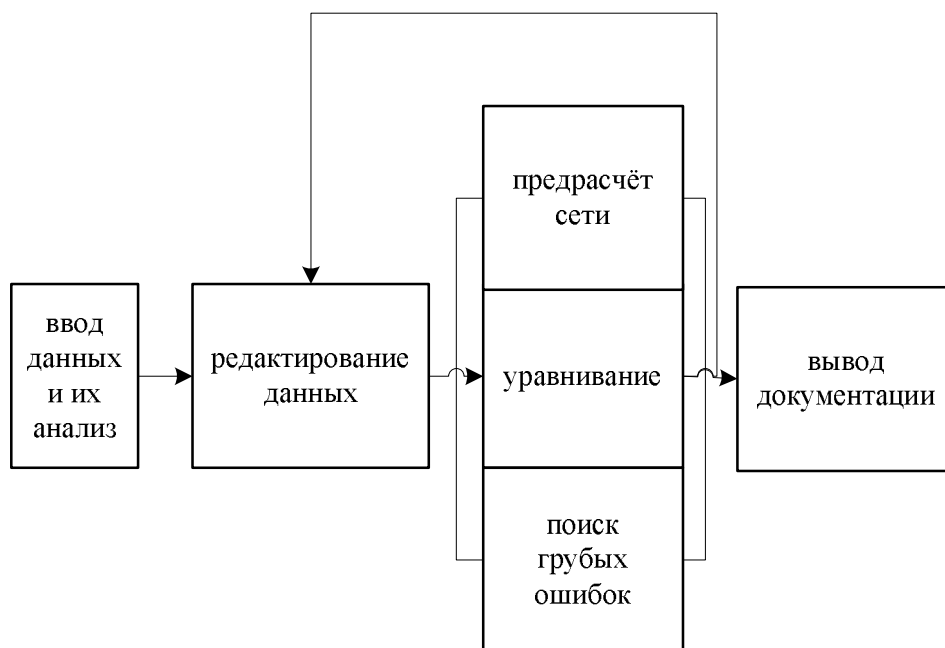


Рис. 1 – Структурная схема программного алгоритма совместного уравнивания геодезических сетей

Исходными данными, включаемыми в совместную обработку, будут являться, с одной стороны, геоцентрические координаты, полученные в результате постобработки спутниковых измерений и их точностные характеристики, с другой стороны — плановые координаты x_i, y_i наземных геодезических построений для этих же пунктов со своими точностными характеристиками, переведённые в прямоугольную пространственную геоцентрическую систему координат по известным

формулам перехода, а также нормальные высоты H_i^N , для перехода от которых к высотам геодезическим, в зависимости от необходимой точности, можно воспользоваться картами аномалий высот ε , используя соотношение

$$H_i = H_i^N + \varepsilon, \quad (19)$$

где H_i — геодезическая высота. Или же использовать одну из моделей геоида. Например, EGM2008.

Исходным элементарным блоком данных здесь будут выступать координаты пунктов, поэтому при упрощённой формальной грамматике в соответствии с нотацией Бэкуса–Наура структуру данных любой сети для нашего случая можно упрощённо описать следующей грамматикой:

- 1) $\langle \text{проект} \rangle ::= \langle \text{имя сети} \rangle \{ \langle \text{пункт} \rangle \}_1^n$;
- 2) $\langle \text{пункт} \rangle ::= [\langle \text{координата X} \rangle] [\langle \text{координата Y} \rangle] [\langle \text{координата Z} \rangle]$.

Элементы, которые заключены в квадратные скобки, в определённых случаях могут отсутствовать.

Такого подхода и такой совокупности данных вполне достаточно, чтобы программно определить топологию сети, её вид, а также схему вычислений.

Приведённые к линейному виду условные уравнения связи с дополнительными неизвестными при совместном уравнивании геодезических построений будут иметь вид:

$$\mathbf{V}_T - \mathbf{V}_S - \mathbf{G}_S \Delta \mathbf{a} + \mathbf{W} = 0 \quad (20)$$

для каждого идентичного пункта i , с матрицей

$$\mathbf{G}_S = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & Z & -Y & X \\ 0 & 1 & 0 & -Z & 0 & X & Y \\ 0 & 0 & 1 & Y & -X & 0 & Z \end{array} \right)_S, \quad (21)$$

составленной из координат, которые относятся к спутниковой сети.

Векторы поправок \mathbf{V}_T и \mathbf{V}_S здесь равны

$$\mathbf{V}_T = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}_T \text{ и } \mathbf{V}_S = \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}_S \quad (22)$$

соответственно.

Вектор $\Delta \mathbf{a}$ содержит в себе поправки к параметрам преобразования и может быть представлен следующим образом:

$$\Delta \mathbf{a} = \begin{pmatrix} \Delta \mathbf{a}_1 \\ \Delta \mathbf{a}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta a_x \\ \delta a_y \\ \delta a_z \\ \delta \varepsilon_x \\ \delta \varepsilon_y \\ \delta \varepsilon_z \\ \delta m \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Вектор невязок \mathbf{W} будет равен

$$\mathbf{W} = \mathbf{T} - \mathbf{S} - \mathbf{G}_S \mathbf{a}^{(0)} \quad (24)$$

для каждого идентичного пункта i , откуда вектор $\mathbf{a}^{(0)}$ приближённых значений параметров преобразования по формуле

$$\mathbf{a}^{(0)} = \mathbf{G}_1^{-1} (\mathbf{T} - \mathbf{S})^{7 \times 1}, \quad (25)$$

где матрицы \mathbf{G}_1 , \mathbf{T} и \mathbf{S} содержат в себе уже уточнённые значения координат пунктов.

Матрица \mathbf{G}_1 здесь представляет собой верхний блок матрицы \mathbf{G}_S , если её представить в виде

$$\mathbf{G}_S = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_1^{7 \times 7} \\ \mathbf{G}_2 \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Далее с целью оптимизации и улучшения обусловленности задачи можно уточнить вектор приближённых значений параметров

преобразования, применив итерационный способ нахождения решения по методу сопряжённых градиентов по формулам (17), для чего примем

$$\mathbf{C} = (\mathbf{E} \quad -\mathbf{E} \quad -\mathbf{G}_S), \quad (27)$$

откуда

$$\mathbf{F} = - \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ -\mathbf{E} \\ -\mathbf{G}_S^T \end{pmatrix} \mathbf{W}. \quad (28)$$

При этом можно говорить о выполнении упрощённого уравнивания, так как попутно уточняются и координаты пунктов, хотя и с нарушением строгости уравнивания.

Тогда для условных уравнений (20) результатам измерений будет соответствовать обратная весовая матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_T & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_S \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Далее представим вектор приближённых значений параметров преобразования в виде

$$\mathbf{a}^{(1)} = f(\mathbf{y}) \quad (30)$$

и сформируем матрицу перехода

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{y}} \quad (31)$$

с целью контроля грубых ошибок измерений, так как в противном случае математическое ожидание вектора невязок оказывается не равно нулю.

В нашем случае матрица перехода $\boldsymbol{\gamma}$ будет иметь все нулевые блоки, кроме тех, которые соответствуют пунктам, участвующим в вычислении приближённых параметров преобразования:

$$\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{G}_{S_1}^{-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad -\mathbf{G}_{S_1}^{-1} \quad 0 \quad \dots \quad 0)^{7(k_T+k_S)}, \quad (32)$$

После её введения получим обратную весовую матрицу $\bar{\mathbf{Q}}$:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{Q}\boldsymbol{\gamma}^T \\ \boldsymbol{\gamma}\mathbf{Q} & \boldsymbol{\gamma}\mathbf{Q}\boldsymbol{\gamma}^T \end{pmatrix}, \quad (33)$$

которая в нашем случае содержит блоки, представляющие собой обратные весовые матрицы наземной геодезической сети, спутниковых построений и параметров преобразования:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_T & 0 & \mathbf{Q}_{T,a} \\ 0 & \mathbf{Q}_S & \mathbf{Q}_{S,a} \\ \mathbf{Q}_{T,a} & \mathbf{Q}_{S,a} & \mathbf{Q}_a \end{pmatrix}. \quad (34)$$

Обратная весовая матрица вектора невязок \mathbf{Q}_W будет определяться по формуле

$$\mathbf{Q}_W = (\mathbf{B}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_2) \bar{\mathbf{Q}} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \end{pmatrix}, \quad (35)$$

где

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\partial \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{a}^{(0)})}{\partial \mathbf{y}}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \frac{\partial \varphi(\mathbf{y}, \mathbf{a}^{(0)})}{\partial \mathbf{a}^{(0)}} \quad (36)$$

за вычетом условного уравнения, выделенного для определения приближённых значений параметров преобразования.

Далее, используя формулы рекуррентного уравнивания, можно выразить вектор поправок \mathbf{V} как

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_T \\ \mathbf{V}_S \\ \mathbf{V}_a \end{pmatrix} = -\mathbf{Z}_2^T \mathbf{N}_2^{-1} \mathbf{W}_2, \quad (37)$$

где \mathbf{Z}_2^T — матрица рекуррентного уравнивания, в которой матрица \mathbf{A}_2 для нашего случая будет равна

$$\mathbf{A}_2 = (\mathbf{B}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_2); \quad (38)$$

\mathbf{N}_2 — также матрица рекуррентного уравнения, которая в нашем случае совпадает с матрицей \mathbf{Q}_W :

$$\mathbf{Q}_W = (\mathbf{B}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_2) \bar{\mathbf{Q}} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \end{pmatrix} = \mathbf{A}_2 \bar{\mathbf{Q}} \mathbf{A}_2^T = \mathbf{A}_2 \mathbf{Z}_2^T = \mathbf{N}_2. \quad (39)$$

Ковариационную матрица вектора невязок можно выразить как

$$\mathbf{K}_W = \sigma_0^2 \mathbf{N}, \quad (40)$$

откуда допустимую невязку можно оценить по известной формуле

$$W_{j \text{ доп.}} = \pm t \sigma_0 \sqrt{N_{jj}}. \quad (41)$$

Уравненные значения координат и параметров преобразования теперь несложно получить как

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}} \\ \tilde{\mathbf{S}} \\ \tilde{\mathbf{a}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{S} \\ \mathbf{a} \end{pmatrix} + \mathbf{V}, \quad (42)$$

причём векторы \mathbf{T} и \mathbf{S} состоят из уточнённых координат пунктов сетей, полученных методом сопряжённого градиента.

После этого необходимо лишь преобразовать вектор $\tilde{\mathbf{S}}$ в вектор $\tilde{\mathbf{T}}$ по формуле

$$\tilde{\mathbf{T}}_i = \tilde{\mathbf{S}}_i + \tilde{\mathbf{G}}_{S_i} \tilde{\mathbf{a}}_i \quad (43)$$

или

$$\tilde{\mathbf{T}}_i = \tilde{\mathbf{a}}_1 + (1 + \tilde{m}) \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{S}}_i. \quad (44)$$

Преобразованные координаты для идентичных пунктов должны совпадать. Также контролем решения задачи будет равенство нулю повторно вычисленного вектора невязок \mathbf{W}_2 .

Обратная весовая матрица уравненных величин будет найдена, исходя из следующей формулы:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{Q}} \begin{pmatrix} \mathbf{B}_2^T \\ \boldsymbol{\beta}_2^T \end{pmatrix} \mathbf{N}_2^{-1} (\mathbf{B}_2 \quad \boldsymbol{\beta}_2) \bar{\mathbf{Q}}, \quad (45)$$

или же, согласно теории рекуррентного уравнивания, учитывая (13):

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{Q}} - \mathbf{z}_2^T \mathbf{N}_2^{-1} \mathbf{z}_2. \quad (46)$$

Контролем при нахождении обратной весовой матрицы уравненных величин будет соблюдение равенства

$$\tilde{\mathbf{Q}}_S = (\mathbf{E} \quad \mathbf{G}) \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_T & \tilde{\mathbf{Q}}_{Ta} \\ \tilde{\mathbf{Q}}_{aT} & \tilde{\mathbf{Q}}_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E} \\ \mathbf{G}^T \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Учитывая диагональные элементы матрицы весов уравненных величин, находятся средние квадратические ошибки отметок каждого пункта, а также средние квадратические ошибки параметров преобразования согласно известной формуле

$$\sigma_i = \sigma_0 \sqrt{\tilde{\mathbf{Q}}_{jj}}. \quad (48)$$

Квадратичная форма будет вычисляться по формуле рекуррентного уравнивания для i -ой группы измерений:

$$\Phi_i = \Phi_{i-1} - \mathbf{W}_i^T \mathbf{N}_i^{-1} \mathbf{W}_i, \quad (49)$$

где Φ_{i-1} — квадратичная форма, полученная при уравнивании спутниковых построений.

В случае уравнивания плановых сетей уравнения связи для общих пунктов i в линейном виде следует записать в виде:

$$\mathbf{V}_S - \mathbf{A}\mathbf{V}_T - \mathbf{G}_S \Delta \mathbf{a} + \mathbf{W}_i = 0, \quad (50)$$

где

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad (51)$$

при

$$\bar{\alpha} = m \cdot \cos \varphi - 1, \quad (52)$$

$$\beta = m \cdot \sin \varphi, \quad (53)$$

m — масштабный фактор, φ — угол поворота,

$$\mathbf{G}_S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & X_i & -Y_i \\ 0 & 1 & Y_i & X_i \end{pmatrix}_S. \quad (54)$$

В случае уравнивания высотных сетей уравнения связи для общих пунктов i в линейном виде следует записать в виде:

$$\delta H_T - \delta H_S - \mathbf{G}_S \Delta \mathbf{a} + w = 0 \quad (55)$$

для каждого идентичного пункта i , а матрица \mathbf{G}_S —

$$\mathbf{G}_S = (1 \quad H)_S \quad (56)$$

или

$$\mathbf{G}_S = \mathbf{E}, \quad (57)$$

если не учитывать масштабный фактор.

Отдельно следует заметить, что в качестве высот H здесь могут выступать либо геодезические, либо нормальные высоты.

По данному алгоритму было выполнено уравнивание моделей нивелирных (рис. 2) и плановых (рис. 3) сетей, построенных в разных системах координат, а также объединение наземной и спутниковой геодезических сетей (рис. 4).

При совместном уравнивании нивелирных сетей значение параметра преобразования оказалось равно:

$$a = -89,9970, \quad (58)$$

а его средняя квадратическая ошибка составила

$$m_a = 24.3 \text{ мм.} \quad (59)$$

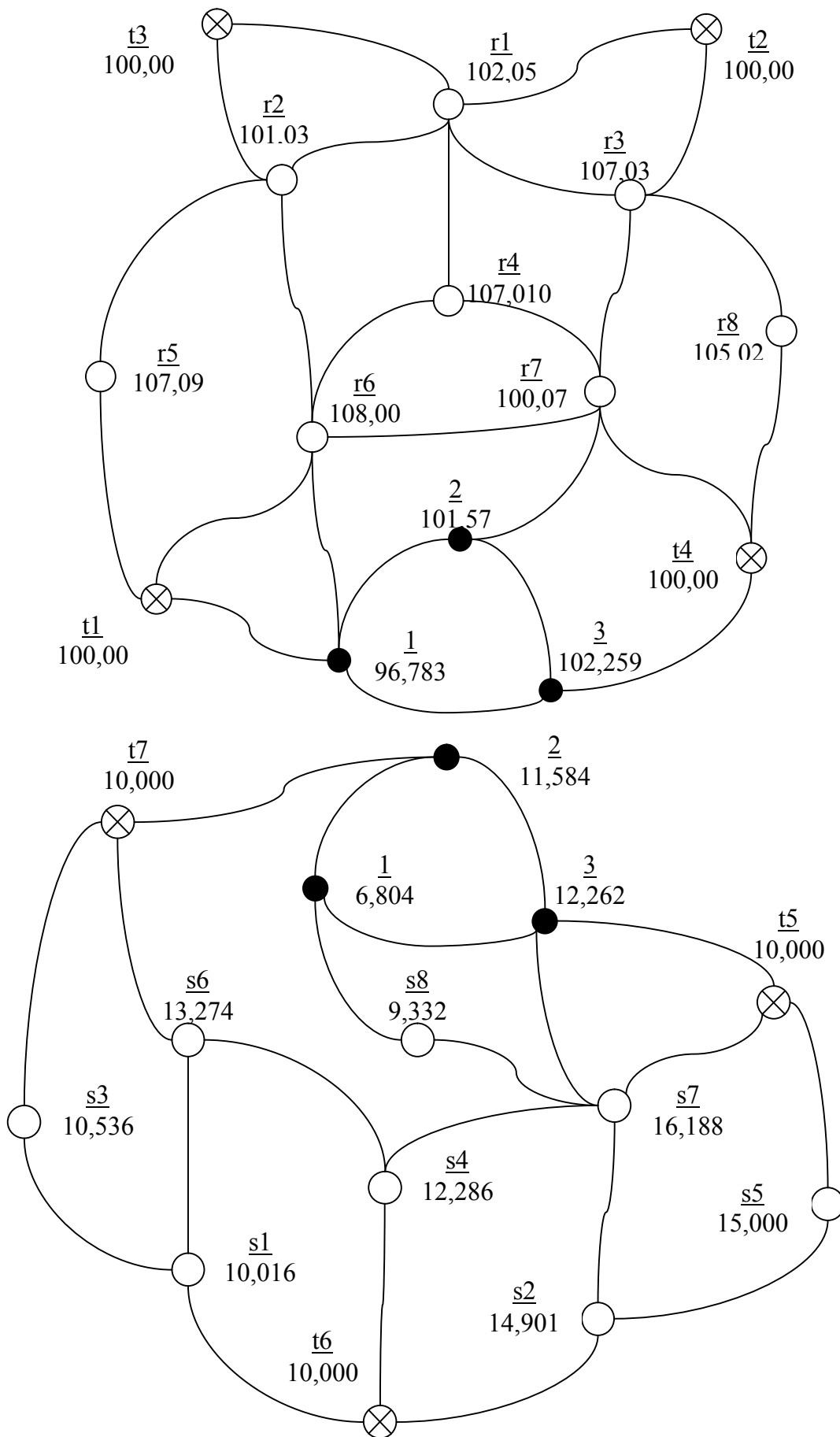


Рис. 2 – Схема нивелирных сетей

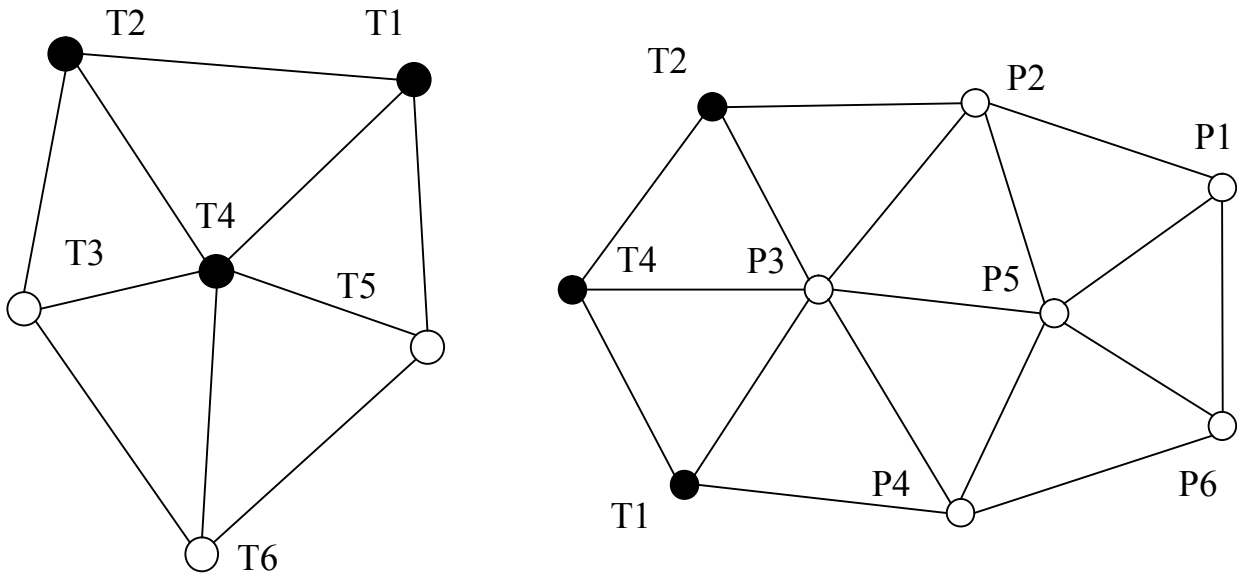


Рис. 3 – Схема плановых сетей

При совместном уравнивании плановых сетей значения параметров преобразования получились следующими: $a_x = +49,735$ м, $a_y = +99,932$ м, $\varphi = 179^\circ 59' 54,3''$, $m = 1,234 \times 10^{-7}$. Их средние квадратические ошибки составили $m_{a_x} = 0,012$ м, $m_{a_y} = 0,013$ м, $m_\varphi = 1,4''$, $m_m = 1,134 \times 10^{-6}$.

При объединении наземной и спутниковой геодезических сетей значения параметров преобразования оказались равны $a_x = +26,684$ м, $a_y = -132,595$ м, $a_z = -76,228$ м, $\varepsilon_x = -0,389''$, $\varepsilon_y = -0,426''$, $\varepsilon_z = -0,874''$, $m = 1,234 \times 10^{-7}$, а их средние квадратические ошибки — $m_{a_x} = 0,009$ м, $m_{a_y} = 0,011$ м, $m_{a_z} = 0,012$ м, $m_{\varepsilon_x} = 0,005''$, $m_{\varepsilon_y} = 0,004''$, $m_{\varepsilon_z} = 0,008''$ и $m_m = 5,821 \times 10^{-7}$.

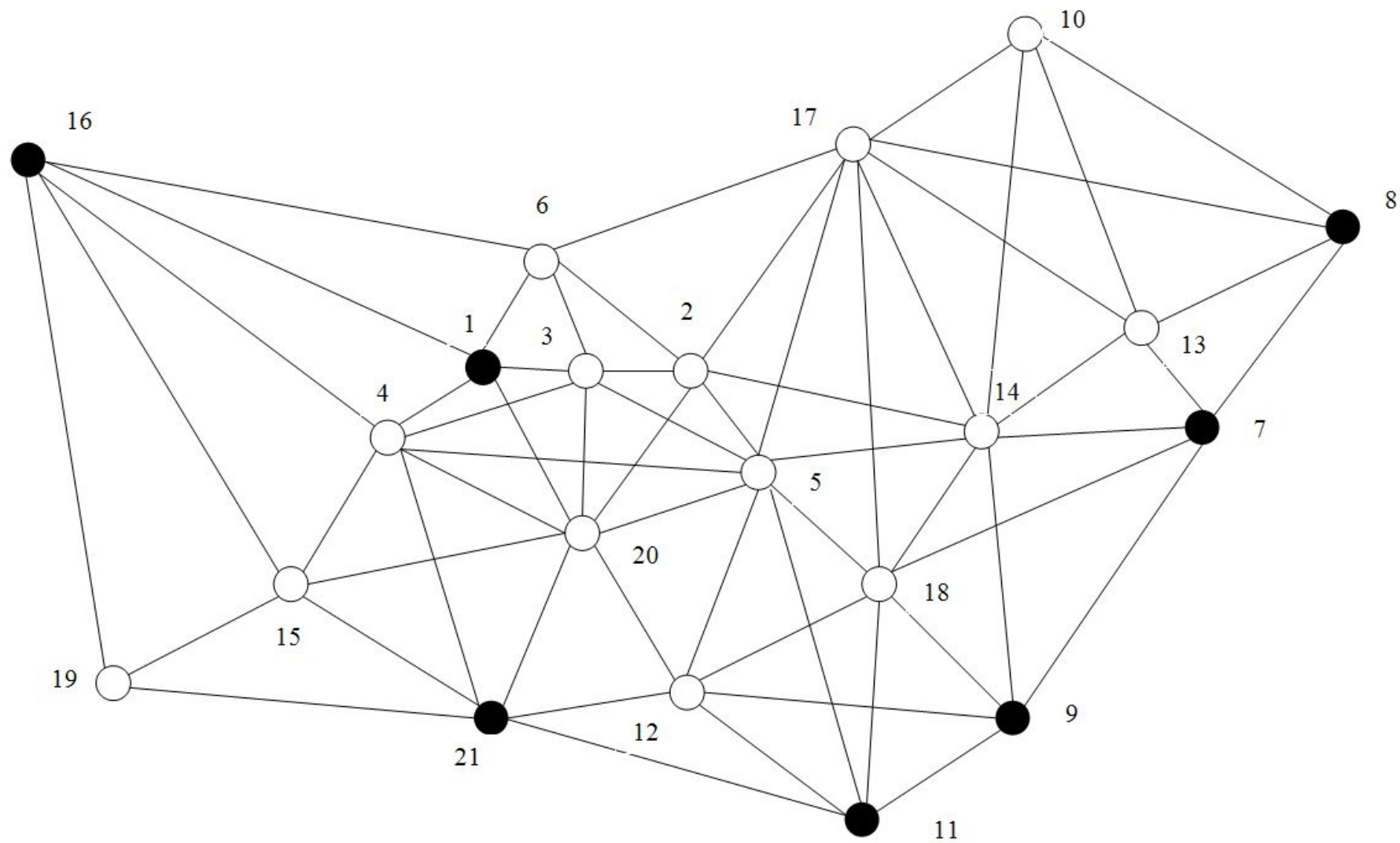


Рис. 4 – Схема сети

Глава 3 «Программная реализация алгоритма и его анализ»

посвящена анализу результатов уравнивания и их сравнению с результатами, полученными в других программах, алгоритмы которых основаны на способе условий с дополнительными неизвестными, но не используют метод сопряжённых градиентов.

При этом рассмотренный в главе 2 алгоритм был реализован как программный модуль “CGM” (от англ. "conjugate gradient method" — метод сопряжённых градиентов), написанный лично автором на языке C++.

Для геодезических сетей, представленных на рис. 2-4, было произведено сравнение уравненных результатов, полученных в программе “CGM” и в программах, разработанных проф. Маркузе Ю.И., по уравниванию нивелирных (“COMBINE1”) и плановых (“COMBINE4”) сетей и объединению наземных и спутниковых сетей (“GPS-3D”).

Как видно из таблиц 1-3, результаты уравнивания в каждом случае практически совпадают.

Таблица 1 – Сравнение результатов уравнивания, полученных в программах “CGM” и “GPS-3D”

№ п/п	по X, м	по Y, м	по Z, м	№ п/п	по X, м	по Y, м	по Z, м
1	+0,003	+0,003	-0,001	12	+0,002	-0,001	-0,003
2	+0,002	+0,000	+0,002	13	-0,003	+0,003	+0,001
3	-0,001	-0,002	+0,000	14	+0,001	+0,000	+0,001
4	-0,000	+0,001	-0,002	15	+0,000	-0,001	+0,001
5	+0,001	-0,000	-0,003	16	-0,000	-0,002	-0,000
6	-0,002	+0,001	+0,001	17	-0,001	-0,000	-0,004
7	+0,000	+0,002	+0,000	18	-0,000	+0,001	+0,001
8	-0,003	+0,002	-0,002	19	+0,001	+0,001	+0,000
9	+0,000	-0,000	+0,003	20	+0,002	-0,002	-0,001
10	-0,002	-0,000	+0,001	21	-0,002	+0,000	-0,001
11	+0,001	+0,001	-0,001				

Таблица 2 – Сравнение результатов уравнивания, полученных в программах “CGM” и “COMBINE1”

	по H , м		по H , м
r1	+0,000	s1	+0,001
r2	+0,000	s2	-0,000
r3	-0,001	s3	+0,000
r4	-0,001	s4	+0,002
r5	+0,000	s5	-0,001
r6	-0,001	s6	-0,000
r7	+0,002	s7	-0,001
r8	-0,001	s8	+0,001
1	+0,001	3	+0,000
2	-0,000		

Таблица 3 – Сравнение результатов уравнивания, полученных в программах “CGM” и “COMBINE4”

	по x , м	по y , м
T1	+0,002	+0,002
T2	-0,002	-0,000
T3	+0,000	+0,001
T4	+0,002	+0,001
T5	-0,000	-0,000
T6	-0,001	-0,002
P1	-0,001	-0,001
P2	+0,001	+0,000
P3	+0,000	+0,000
P4	-0,000	-0,001
P5	+0,002	+0,001
P6	-0,001	-0,001

Также было проведено исследование расхождений между координатами пунктов, вычисленными по формулам (43) и (44). Показано, что эти расхождения определяются как

$$\left. \begin{aligned} \delta X_T &= mZ_S \varepsilon_y - mY_S \varepsilon_z; \\ \delta Y_T &= mX_S \varepsilon_z - mZ_S \varepsilon_x; \\ \delta Z_T &= mY_S \varepsilon_x - mX_S \varepsilon_y. \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Для сети, представленной на рис. 3, эти расхождения составили в среднем $3,87 \times 10^{-6}$ м (по X), $3,18 \times 10^{-6}$ м (по Y) и $0,47 \times 10^{-6}$ м (по Z). Для большинства случаев эти расхождения не только не превышают средние квадратические ошибки определения координат пунктов, но и оказываются существенно меньше ошибок округления. Следовательно, можно полагать, что результаты, получаемые по формулам (43) и (44) совпадают.

Также на примере сети, представленной на рис. 4, было произведено сравнение результатов уравнивания в пространстве (без учёта координаты Z) и на плоскости (аналогично уравниванию плановых

сетей). Максимальное расхождение в полученных координатах составило 0.002 м (для X) и 0.001 м (для Y), что для большинства случаев оказывается несущественным. Таким образом, когда не требуется знать высоты пунктов, с точки зрения экономии процессорного времени компьютера и сокращения расчётов при объединении наземных и спутниковых геодезических сетей целесообразно отдавать предпочтение уравниванию на плоскости.

Заключение.

Основные результаты теоретических и экспериментальных исследований, выполненных в диссертационной работе, заключаются в следующем:

1. Предложена структура алгоритма совместной математической обработки геодезических сетей, построенных в разных системах координат, ход вычислений в которой может определяться автоматически, исходя из имеющихся данных.

2. Разработан алгоритм совместного уравнивания геодезических сетей, построенных в разных системах координат, на основе модифицированного способа условий с дополнительными неизвестными с применением формул рекуррентного уравнивания и метода сопряжённых градиентов, позволяющий выполнять контроль грубых ошибок и уточнять приближённые значения параметров преобразования и координаты общих пунктов сетей на стадии вычислений. Проведённые исследования показали эффективность использования данного алгоритма.

3. Показано, что использование исходной и линеаризованной формулы перехода из одной системы координат в другую приводит к совпадающим результатам и не оказывает существенного влияния на точность определения координат пунктов.

4. Показано, что в случае, когда нет необходимости знать высоты пунктов, при объединении наземных и спутниковых геодезических сетей целесообразно выполнять уравнивание на плоскости.

Список публикаций по теме диссертации:

1. Клыпин И.А. К вопросу об уравнивании геодезических сетей, построенных в разных системах координат // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2010. – №6. – С. 11–13.

2. Клыпин И.А. Объединение наземных геодезических сетей и спутниковых построений // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка. – 2011. – №5. – С. 30-31.

3. Клыпин И.А., Коныжева М.В. Объединение нивелирных сетей, созданных в разных системах координат // Сборник статей по итогам научно-технических конференций: приложение к журналу «Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъёмка». – Выпуск 3. – 2010. – С. 67–68