

На правах рукописи

УДК 528.94

КОНДРАЧУК АЛЛА ВАЛЕРЬЕВНА

**ИССЛЕДОВАНИЕ И РАЗРАБОТКА ПЕРСПЕКТИВНЫХ ПРОЕКЦИЙ
ТРЕХОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА ДЛЯ КАРТОГРАФИРОВАНИЯ
ПОВЕРХНОСТЕЙ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ**

25.00.33 – Картография

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук



Москва 2009

Работа выполнена на кафедре Картографии Московского государственного университета геодезии и картографии

Научный руководитель – доктор технических наук, профессор
Бугаевский Лев Моисеевич

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор

Шингарева Кира Борисовна

Кандидат технических наук Флейс Мария Эдгаровна

Ведущая организация: Центральный научно-исследовательский институт геодезии и картографии (ЦНИИГАиК)

Защита диссертации состоится _____ 2009 года в ____ часов
на заседании диссертационного Совета Д.212.143.01 при Московском
государственном университете геодезии и картографии по адресу: 105064,
Москва, Гороховский пер., 4, зал заседаний Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИИГАиК

Автореферат разослан _____ 2009 года

Ученый секретарь
диссертационного Совета



Б.В. Краснопевцев

Актуальность проблемы.

Изучение космического пространства ставит перед математической картографией новые задачи. Одной из таких задач является разработка картографических проекций для создания карт планет, их спутников и других небесных тел, многие из которых имеют весьма сложную форму. Использование для них в качестве поверхности относимости традиционных для картографии фигур – шар, эллипсоид вращения – уже недостаточно. Многие небесные тела со сложной нерегулярной поверхностью следует аппроксимировать трехосным эллипсоидом. Таким образом, возникает необходимость изысканий проекций трехосного эллипсоида.

В настоящее время в математической картографии разработано достаточно большое количество проекций и способов их изыскания, одним из которых является перспективный. Этот способ довольно распространен, позволяет получать разнообразные по свойствам и виду сеток картографические проекции и, кроме того, он относительно прост, что существенно при использовании такой сложной фигуры, как трехосный эллипсоид. Поэтому разработка теории и получение конкретных вариантов перспективных проекций трехосного эллипсоида является актуальной задачей.

Цель и задачи диссертации.

Целью диссертационной работы является разработка теории различных классов перспективных проекций трехосного эллипсоида.

Для реализации поставленных целей необходимо было решить следующие задачи:

- проанализировать отечественный и зарубежный опыт получения, применения перспективных проекций разных классов;
- разработать методику получения перспективных проекций трехосного эллипсоида разных классов;
- получить варианты перспективных проекций трехосного эллипсоида и исследовать их свойства.

Объект исследования:

Объектом исследования являются планеты, их спутники и другие небесные тела, имеющие сложную форму. Предмет исследования – теория, методы получения перспективных проекций трехосного эллипсоида.

Методы и средства исследования:

Диссертационное исследование опирается на методологические основы и практику, опыт разработки и использовании проекций разных классов при создании фундаментальных картографических произведений, а также на достижения математической картографии, достижения в области компьютерных технологий.

Состояние изученности проблемы:

Проблема изучена по изданным картографическим произведениям, трудам ученых в области математики и математической картографии: Л. М. Бугаевского, Л. А. Вахрамеевой, Г. А. Гинзбурга, А. И. Петренко, А. В. Шапошникова, В. В. Каврайского, Мердока, Христова, М. Д. Соловьева, Г. И. Конусовой, Уэтча, Брауна, Голла, многих других, и раскрыта в гл. 1 диссертации.

На защиту выносятся:

- теоретические разработки и методика получения перспективных проекций трехосного эллипсоида;
- формулы перспективных проекций разных классов;
- разработанные варианты перспективных проекций трехосного эллипсоида с их характеристиками.

Научная новизна:

Предлагаемая диссертационная работа представляет теорию перспективных проекций в целом, впервые представляет новые классы перспективных проекций трехосного эллипсоида, методы их получения и рассчитанные варианты. Новые научные результаты исследований состоят в следующем:

- разработана методика получения перспективных проекций трехосного эллипсоида на базе общей теории перспективных проекций;
- впервые получены формулы:

- перспективных цилиндрических проекций эллипсоида вращения и трехосного эллипсоида с негативным и позитивным изображением;
- перспективных конических проекций трехосного эллипсоида с негативным и позитивным изображением;
- вариантов разработанных классов проекций при разных положениях точки проектирования и вспомогательных поверхностей (секущей и касательной);
- комбинированных проекций, полученных на основе перспективных проекций с негативным и позитивным изображением;
- исследованы свойства различных классов перспективных проекций трехосного эллипсоида и получены их основные характеристики (характер искажения, интегральный критерий);
- построены картографические сетки проекций, в том числе, с нанесенными на них изоколами.

Теоретико-методологические положения диссертации разработаны на основе изучения и анализа существующих перспективных проекций шара и эллипсоидов вращения, их свойств и способов получения.

Практическая значимость работы:

Практическая значимость диссертации непосредственно связана с разработкой математической основы карт небесных тел, имеющих сложную форму, аппроксимируемую трехосным эллипсоидом.

Результаты исследований внедрены в учебный процесс в Московском государственном университете геодезии и картографии при чтении курса «Математическая картография», в дипломном проектировании.

Апробация результатов работы:

Диссертационные исследования докладывались и обсуждались на научно-практических конференциях студентов МИИГАиК, научно-практической конференции профессорско-преподавательского состава МИИГАиК, семинарах кафедры картографии МИИГАиК.

Публикации:

По теме диссертации опубликовано 3 работы.

Объем и структура работы:

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения. Общий объем работы составляет 80 страниц, в том числе 50 рисунков и 4 таблицы. Список литературы включает 46 наименований литературных источников, включая ресурсы Internet.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обоснована актуальность темы, сформулированы цель и задачи исследований.

Глава 1. Существующие перспективные проекции их свойства и способы получения

В главе подробно рассмотрены вопросы, связанные с геометрией получения и применением имеющихся перспективных проекций разных классов – шара и эллипсоида вращения.

Перспективными называются проекции, в которых поверхность Земли или других небесных тел отображается прямолинейными визирными лучами из точек пространства, называемых точками зрения, на развертывающиеся поверхности цилиндра, конуса или плоскость. Во всех перспективных проекциях построение изображения осуществляется последовательно по каждому меридианному сечению.

Перспективные проекции известны с древнейших времен. Так, в VI в. до н.э. в древней Греции Фалесом Милетским была предложена гномоническая проекция. В древнем Китае в 1094 г., Су Сун в своей книге “Сиисян фаяо” опубликовал две карты в ортографической проекции. В XVIII в. в России были изданы карты в косо́й стереографической проекции. Различные варианты перспективных цилиндрических проекций использовались в Большом советском атласе мира, 1954 г.; Национальном атласе России (том 1), 2004 г.; в учебных атласах. Перспективные азимутальные проекции наиболее широко используются в качестве математических моделей аэро-космических, сканерных снимков.

Существует два метода получения проекций: геометрический (на основе подобия фигур) и аналитический (метод визирования). Отличительной особенностью обоих методов является простота, но аналитический метод является более универсальным и в ряде случаев более простым.

К настоящему времени получены перспективные проекции разных классов с разной поверхностью относимости (шар, эллипсоид вращения, трехосный эллипсоид) и различным положением точки зрения. Наиболее полно разработаны перспективные проекции шара, и практически не разработаны перспективные проекции трехосного эллипсоида (табл. 1).

Перспективные проекции разных классов

Табл. 1

Проекция Пов-ть относимости	Перспективные		
	Цилиндрические	Конические	Азимутальные
Шар	Разработаны	Разработаны	Разработаны
Эллипсоид вращения	Не разработаны	Разработаны	Разработаны
Трехосный эллипсоид	Не разработаны	Не разработаны	Разработаны частично

Таким образом, представляется актуальным разработать перспективные цилиндрические проекции эллипсоида вращения и перспективные проекции трехосного эллипсоида. Это необходимо для полного обеспечения теоретической базы создания карт небесных тел в перспективных проекциях.

Глава 2. Перспективные цилиндрические проекции эллипсоида вращения и принципы их получения

Рассмотрены теоретические аспекты получения перспективных цилиндрических проекций эллипсоида вращения на основе метода визирования.

Рассмотрим метод (принцип) получения перспективных цилиндрических проекций эллипсоида вращения на примере проекции с негативным изображением на секущем цилиндре в нормальной ориентировке.

Пусть на рис. 1 показан эллипсоид вращения с полуосями a и b . Его пересекает цилиндр, ось вращения которого совпадает с осью вращения

эллипсоида. $A_k(\varphi_k, \lambda)$ – точка пересечения поверхности эллипсоида и цилиндра. Точка зрения g лежит произвольно, ее положение задается расстоянием $Og=D$ и углом α . $A(\varphi, \lambda)$ – текущая точка на поверхности эллипсоида. Визирный луч gA пересечет образующую цилиндра $A'A_k$ в точке A' .

Пусть начало системы координат лежит в точке $O(0,0)$, тогда в системах координат плоскости каждого меридиана будем иметь:

$$\begin{array}{llll} O: x = 0; & A: x = N(1-e^2)\sin\varphi; & A_k: x = N_k(1-e^2)\sin\varphi_k; & g: x = D\sin\alpha; \\ y = 0; & y = -N\cos\varphi; & y = -N_k\cos\varphi_k; & y = D\cos\alpha. \end{array}$$

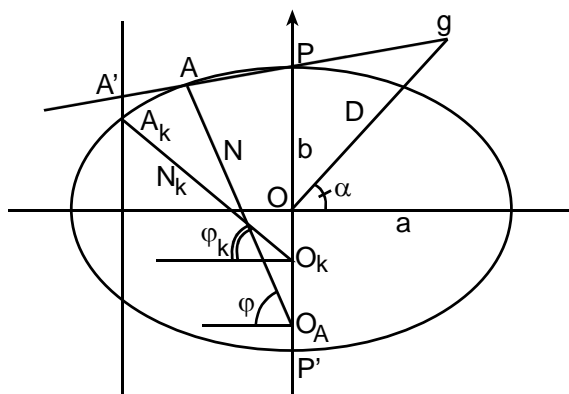


Рис. 1. Схема получения перспективной цилиндрической проекции с негативным изображением на секущем цилиндре с произвольным положением точки зрения

Уравнение визирного луча gA запишется в следующем виде:

$$(x-D\sin\alpha)(-N\cos\varphi-D\cos\alpha) = (y-D\cos\alpha)(N(1-e^2)\sin\varphi-D\sin\alpha), \text{ а уравнение образующей цилиндра: } y = -N_k(1-e^2)\sin\varphi_k.$$

Из совместного решения уравнений визирного луча и образующей цилиндра, получим формулы прямоугольных координат проекции.

$$\begin{aligned} x &= D\sin\alpha + (D\cos\alpha + N_k\cos\varphi_k)(N(1-e^2)\sin\varphi - D\sin\alpha) / (D\cos\alpha + N\cos\varphi); \\ y &= N_k\cos\varphi_k\lambda. \end{aligned} \quad (1)$$

В этих формулах: x, y – прямоугольные координаты точек проекции;

D – расстояние от точки зрения до центра эллипсоида;

α – угол между плоскостью экватора и линией Og ;

N – радиус кривизны сечения первого вертикала; $N = a / (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$;

e – первый эксцентриситет эллипсоида вращения; $e = (1 - (b/a)^2)^{1/2}$;

a, b – большая и малая полуоси эллипсоида вращения.

Картографическая сетка проекции показана на рис. 2.

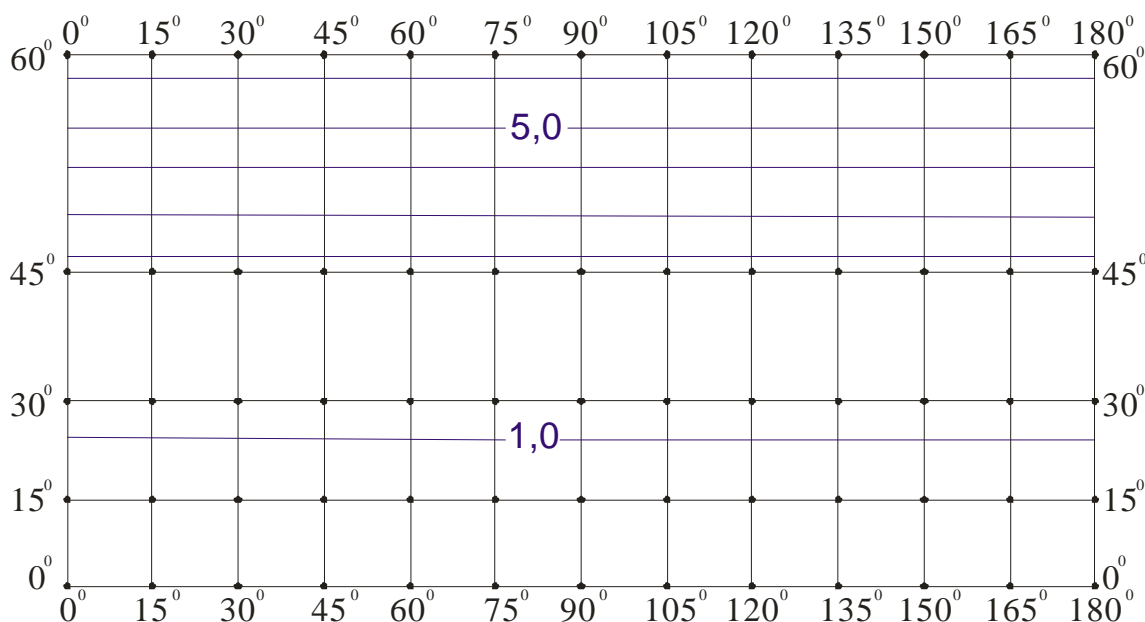


Рис. 2. Сетка перспективной цилиндрической проекции эллипсоида вращения с негативным изображением с произвольным положением точки зрения

В диссертации подробно рассмотрено получение различных вариантов перспективных цилиндрических проекций: с негативным и позитивным изображениями, на касательном и секущем цилиндрах, с различным положением точки зрения, в том числе проекции типа Брауна (точка зрения лежит на поверхности эллипсоида в плоскости экватора), типа Уэтча (точка зрения лежит в центре эллипсоида), проекции с точкой зрения, лежащей в бесконечности. Приведены варианты получения комбинированных проекций с негативным и позитивным изображениями, построены картографические сетки.

Анализ вида картографических сеток всех перспективных цилиндрических проекций эллипсоида вращения показал:

- параллели представляют собой прямые линии, а меридианы – ортогональные параллелям равноотстоящие прямые;
- в проекциях полюс изображается прямой линией или уходит в бесконечность (проекции типа Уэтча);
- сетки проекций ортогональны и симметричны относительно среднего меридиана и экватора (рис. 2);
- изоколы имеют вид прямых линий, параллельных экватору;

- проекции являются произвольными по характеру искажений, ближе к равноугольным;

Разработанные перспективные цилиндрические проекции эллипсоида вращения дополняют существующие, что дает возможность представить теорию перспективных проекций эллипсоида вращения в завершенном и полном виде (см. табл. 1).

Глава 3. Исследование и разработка теории перспективных проекций трехосного эллипсоида

В главе освещены особенности систем координат трехосного эллипсоида, введены понятия о широтах и долготах в связи с тем, что геодезическая система координат не является однозначной для трехосного эллипсоида.

Вопросами установления систем координат трехосного эллипсоида занимались: А. Кларк, Н. Ф. Красовский, Н. А. Беспалов и другие.

В работе используются понятия условно-геодезической и геодезической систем координат, приведенные в работе Л. М. Бугаевского «Теория картографических проекций регулярных поверхностей». В обеих системах координат долготы определяются одинаково, как двугранный угол между плоскостями сечений, проходящих через ось эллипсоида, начальный и текущий пункты. А понятия условно-геодезической и геодезической широт не совпадают.

Под условно-геодезической широтой B понимается угол между нормалью AK к эллипсу PAP_1 в т. A и линией OD . Однако линия AK не является нормалью к его поверхности (рис. 3).

Под геодезической широтой φ трехосного эллипсоида понимается угол между нормалью к поверхности трехосного эллипсоида в т. A и плоскостью экватора.

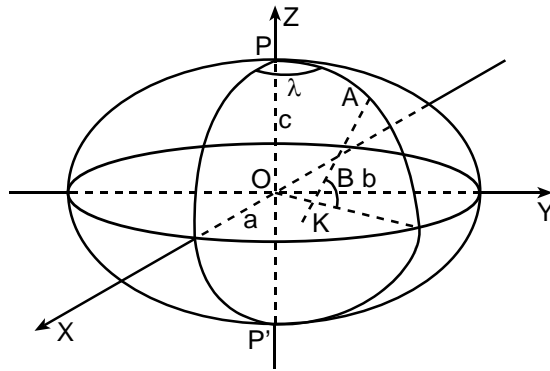


Рис. 3. Условно геодезическая система координат трехосного эллипсоида

Формулы связи геодезической и условно-геодезической систем координат

имеют следующий вид:

$$\sin B = \sin \varphi [(1+z^2)/(1+z^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}]; \quad \cos B = \cos \varphi [(1+z^2 \sin^2 \varphi)^{-1/2}], \quad \text{где}$$

$$z = -d_\lambda/d = k^2 \sin 2\lambda / [2(1-k^2 \cos^2 \lambda)];$$

$$d_\lambda = -ab(a^2-b^2) \sin 2\lambda / [2(a^2 \sin^2 \lambda + b^2 \cos^2 \lambda)^{1/2}];$$

$$d = b(1-k^2 \cos^2 \lambda)^{-1/2}; \quad k^2 = 1-(b/a)^2,$$

a, b – полуоси трехосного эллипсоида,

φ – геодезическая широта данной точки,

B – условно-геодезическая широта данной точки,

λ – геодезическая долгота данной точки.

Различия в величинах условно-геодезических и геодезических широт не велики и наглядно представлены на рис. 4, на примере проекции типа Брауна.

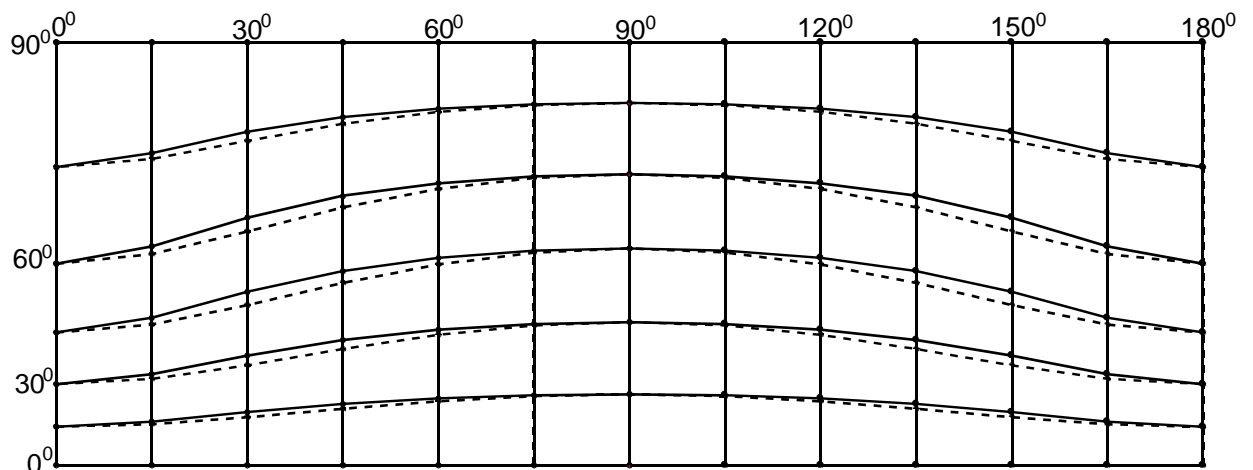


Рис. 4. Проекция типа Брауна в различных системах координат (сплошная сетка построена с использованием геодезической системы координат; штриховая сетка построена с использованием условно-геодезической системы координат)

В дальнейшем при рассмотрении вопросов, связанных с получением формул прямоугольных координат проекции использовалась условно-геодезическая система координат. Расчеты всех проекций выполнены для спутника Юпитера Амальтеи, т.к. его форма аппроксимируется трехосным эллипсоидом.

Перспективные цилиндрические проекции трехосного эллипсоида.

Получим формулы прямоугольных координат перспективной цилиндрической проекции с негативным изображением на основе метода визирования.

Рассмотрим рис. 5, на котором представлена схема получения нормальных перспективных цилиндрических проекций трехосного эллипсоида с негативным изображением на секущем цилиндре с произвольным положением точки зрения.

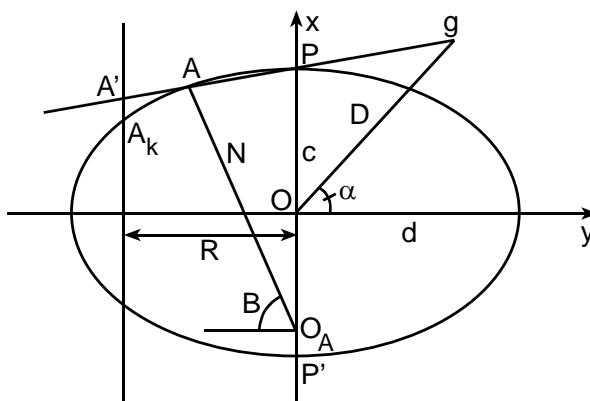


Рис. 5. Схема получения перспективных цилиндрических проекций трехосного эллипсоида с негативным изображением на секущем цилиндре с произвольным положением точки зрения

Пусть положение точки зрения g определяется расстоянием $Og=D$ от центра трехосного эллипсоида и углом α . $A (B, \lambda)$ – текущая точка на поверхности трехосного эллипсоида. A_k – точка пересечения образующей цилиндра и трехосного эллипсоида. R – радиус вспомогательного цилиндра. Возьмем начало прямоугольных координат в т. O . Тогда в системе координат плоскости каждого меридиана будем иметь:

$$\begin{array}{lll} O: x = 0; & A: x = N(1-p^2)\sin B; & g: x = D\sin\alpha; \\ y = 0; & y = -N\cos B; & y = D\cos\alpha. \end{array}$$

Запишем уравнения визирного луча gA и образующей цилиндра A_kA' :

$$(x - D \sin \alpha)(-N \cos B - D \cos \alpha) = (y - D \cos \alpha)(N(1 - p^2) \sin B - D \sin \alpha); y = -R.$$

Совместное решение этих уравнений, позволяет получить формулы прямоугольных координат проекции на *секущем* цилиндре:

$$x = D \sin \alpha + (R + D \cos \alpha)(N(1 - p^2) \sin B - D \sin \alpha) / (N \cos B + D \cos \alpha); y = R \lambda. \quad (2)$$

Если в качестве вспомогательной поверхности использовать *касательный* цилиндр, то формулы прямоугольных координат перспективной цилиндрической проекции трехосного эллипсоида с негативным изображением будут иметь следующий вид:

$$x = D \sin \alpha + (a + D \cos \alpha)(N(1 - p^2) \sin B - D \sin \alpha) / (N \cos B + D \cos \alpha); \quad (3)$$

$$y = a \lambda.$$

В этих формулах:

x, y – прямоугольные координаты точек проекции;

B, λ – условно-геодезические координаты;

R – радиус вспомогательного цилиндра;

D – расстояние от точки зрения до центра трехосного эллипсоида;

α – угол между направлением Og и плоскостью экватора;

N – радиус кривизны сечения первого вертикала; $N = d / (1 - p^2 \sin^2 B)^{1/2}$, где

$d = b / (1 - k^2 \cos^2 \lambda)^{1/2}$; $k^2 = 1 - (b/a)^2$; $p^2 = 1 - (c/d)^2$.

a, b, c – полуоси трехосного эллипсоида.

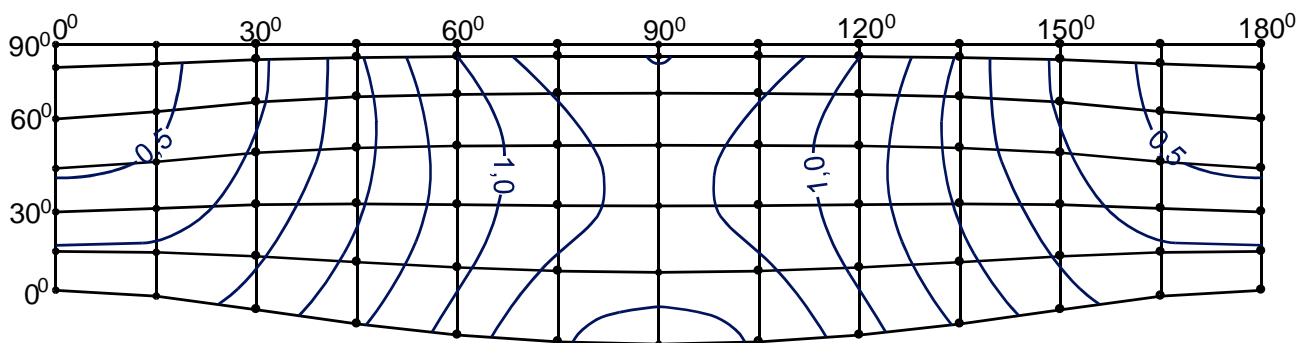


Рис. 6. Сетка прямоугольных координат перспективной цилиндрической проекции трехосного эллипсоида с негативным изображением на секущем цилиндре с произвольным положением точки зрения для спутника Юпитера Амальтеи с изоколами масштабов площадей (Расчет производился по значениям: $a=135000$ (м), $b=85000$ (м), $c=77500$ (м); $D=100000$ (м), $\alpha=25^\circ$; $R_{\text{цилиндра}}=100000$ (м))

В диссертации приведены 6 формул для нахождения прямоугольных координат перспективных цилиндрических проекций трехосного эллипсоида с негативным и позитивным изображением с различным положением точки зрения, а также формулы комбинированных перспективных цилиндрических проекций с негативным и позитивным изображением.

На основании расчетов прямоугольных координат проекций было построено 6 вариантов сеток разработанных проекций для спутника Юпитера – Амальтеи на рис. 7, 8 представлены 2 из них.

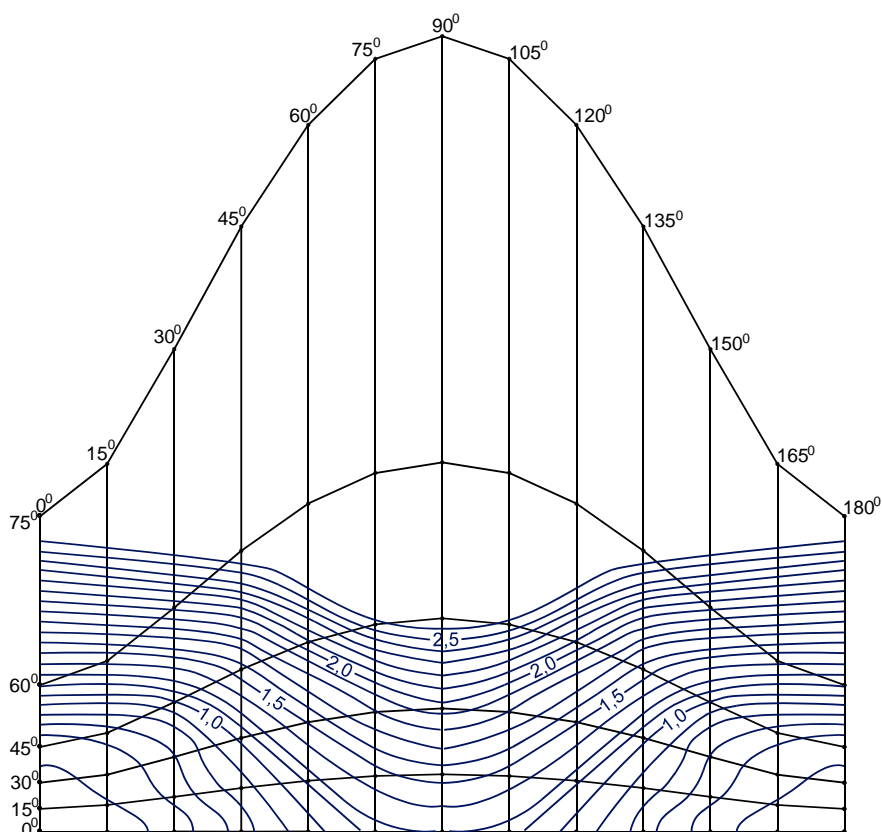


Рис. 7. Сетка перспективной цилиндрической проекции трехосного эллипсоида типа Уэтча с изоколами масштабов площадей

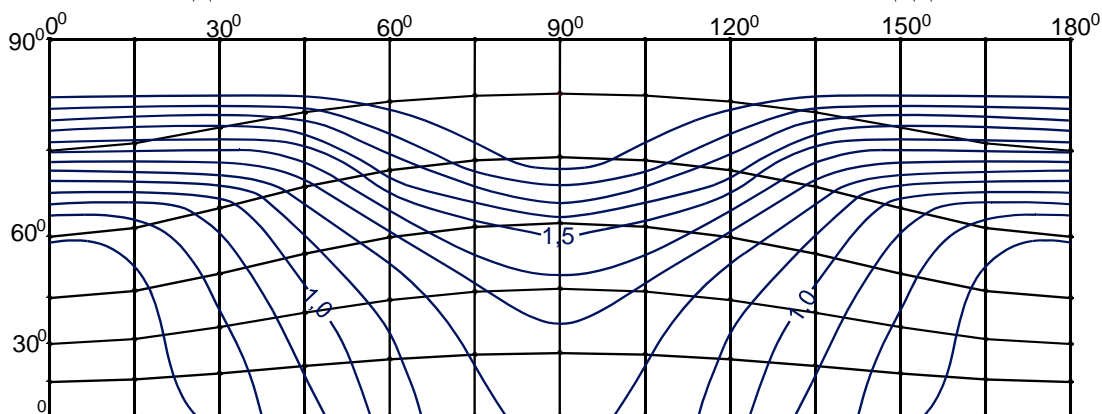


Рис. 8. Сетка перспективной цилиндрической проекции трехосного эллипсоида типа Брауна с изоколами масштабов площадей

Поскольку перспективный способ изыскания проекций основан на решении прямой задачи математической картографии, свойства получаемых проекций (характер искажений, их величины и распределение) нельзя определить заранее. Эти свойства определяются после получения формул прямоугольных координат проекций и вычислений на их основе частных масштабов длин, площадей и искажений углов. На основании построенных сеток и вычисленных искажений перспективных цилиндрических проекций трехосного эллипсоида можно сделать следующие относящиеся к ним выводы:

- в проекциях параллели изображаются в виде кривых, т.к. являются функциями широты, и долготы;
- меридианы изображаются в виде равноотстоящих параллельных прямых;
- сетки проекций не ортогональны;
- в проекциях полюс изображается в виде прямой линии или уходит в бесконечность (проекции типа Уэтча);
- сетки проекции симметричны относительно среднего меридиана;
- изоколы масштабов площадей и искажений углов имеют вид кривых.

Оценка искажений. В пределах всей картографируемой территории для оценки всех типов искажений использовался критерий вариационного типа

$$E^2 = 1/S \int \epsilon^2 dS, \quad (4)$$

где S – площадь территории;

ϵ^2 – критерий Эйри, являющийся мерой комплексного искажения в отдельной точке;

$$\epsilon^2 = ((a/b-1)^2 + (ab-1)^2)/2; \quad (5)$$

a, b – экстремальные масштабы длин.

Определить E^2 в явном виде трудно, но его приближенное значение можно получить, заменив интеграл суммой ϵ_i^2 , взятых в отдельных точках проекции

$$E^2 = 1/K \sum \epsilon_i^2. \quad (6)$$

Для определения характера искажений полученных проекций использовался критерий Г. И. Конусовой, определяющий соотношение искажений форм и площадей:

$$\operatorname{tga} = (a/b-1)/(ab-1), \quad (7)$$

$\alpha = 0$ – для равноугольных проекций;

$\alpha = \pi/2$ – для равновеликих проекций;

$0 < \alpha < \pi/2$ – для произвольных проекций.

Результаты оценки искажений по критериям Эйри и Г. И. Конусовой представим в табл. 2.

Оценка перспективных цилиндрических проекций трехосного эллипсоида по критериям Эйри и Конусовой *Табл. 2.*

Положение точки зрения		Критерий	
		Эйри	Конусовой (°)
1	В бесконечности	0,698	77
2	В центре эллипсоида	8,993E+30	33
3	На поверхности эллипсоида	0,662	69
4	Произвольное	0,691	76

Из таблицы видно, что наибольшие искажения наблюдаются в проекциях типа Уэтча. Наименьшие искажения в проекциях типа Брауна. Искажения в проекциях с произвольным положением точки зрения и с точкой зрения, лежащей в бесконечности примерно одинаковые.

Анализ проекций по критерию Конусовой показал, что они произвольны по характеру искажений, но наиболее близки к равновеликим, кроме проекций типа Уэтча (в этих проекциях, характер искажений ближе к равноугольному).

В практике математической картографии нашли применение проекции, получаемые комбинацией уравнений известных проекций. Уравнения таких проекций задаются как: $X = K_1 X_1 + K_2 X_2$, $Y = K_1 Y_1 + K_2 Y_2$,

где $K_1 + K_2 = 1$,

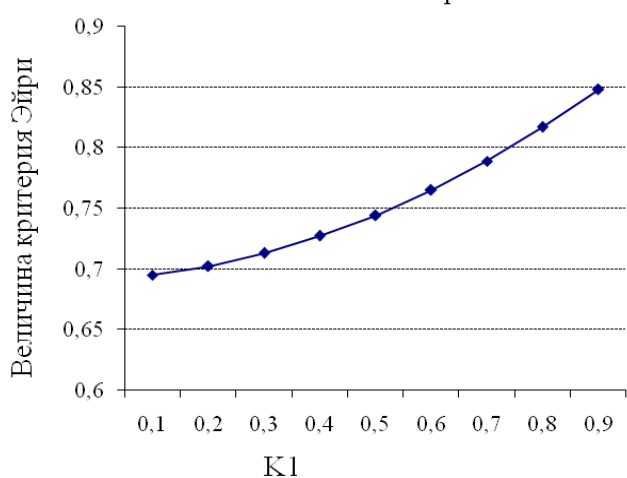
K_1 – доля проекций с негативным изображением;

K_2 – доля проекций с позитивным изображением;

X_1, Y_1, X_2, Y_2 - координаты исходных проекций.

В работе рассмотрены проекции, получаемые комбинированием перспективных цилиндрических проекций с позитивным и негативным изображением. Для определения их оптимального соотношения, т.е. коэффициентов K_1, K_2 , использовались критерии Эйри и Г. И. Конусовой, изменения которых представлены на рис. 9.

Изменение величины критерия Эйри в комбинированной перспективной цилиндрической проекции трехосного эллипсоида с произвольным положением точки зрения



Изменение величины критерия Конусовой в комбинированной перспективной цилиндрической проекции трехосного эллипсоида с произвольным положением точки зрения

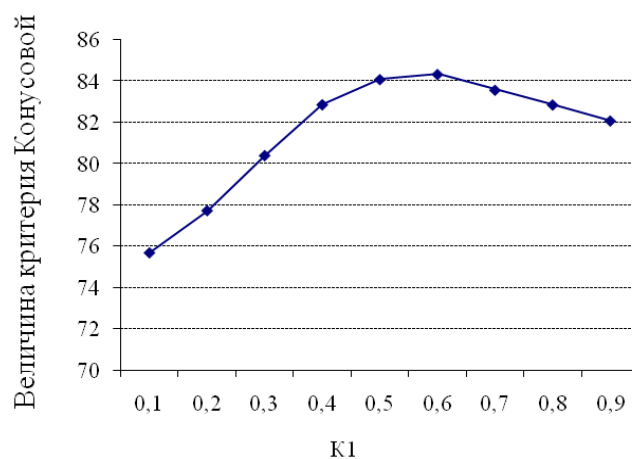


Рис. 9. Изменения критериев Г. И. Конусовой и Эйри в зависимости от изменения коэффициентов проекций

Анализ изменений критериев показал, что при увеличении доли проекции с негативным изображением происходит незначительный рост суммарных искажений, и по характеру искажений проекция приближается к равновеликой. Наиболее близкой к равновеликой комбинированная проекция будет при $K_1 = 0,6$.

Перспективные конические проекции трехосного эллипсоида.

Принципиальная схема получения прямоугольных координат перспективных конических проекций на основе метода визирования сводится к последовательному нахождению:

- прямоугольных координат x, y точек проекции трехосного эллипсоида на поверхность вспомогательного конуса в плоскости каждого меридиана;
- прямоугольных координат x_p, y_p вершины вспомогательного конуса;

- полярных радиусов ρ и полярных углов δ ;
- постоянного параметра проекции C ;
- прямоугольных координат X, Y перспективной конической проекции на плоскости.

Рассмотрим пример получения нормальной перспективной конической проекции трехосного эллипсоида с негативным изображением на секущем конусе с произвольным положением точки зрения. На рис.10, точка g – точка проектирования, A – проектируемая точка (текущая точка) на поверхности трехосного эллипсоида, PA' – образующая секущего конуса. R – радиус основания конуса в плоскости экватора, β – угол между образующей конуса и его основанием. Возьмем начало системы координат в т. O , тогда в системах координат плоскости каждого меридиана получим:

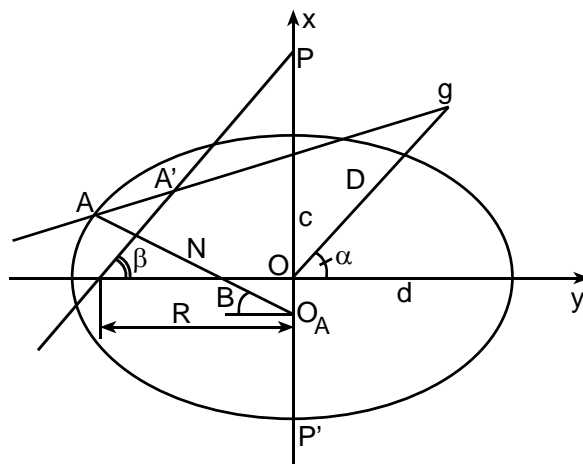


Рис. 10. Схема получения нормальной перспективной конической проекции трехосного эллипсоида на секущем конусе

$$\begin{array}{lll} O: x = 0; & g: x = D \sin \alpha; & A: x = N(1-p^2) \sin B; \\ y = 0; & y = D \cos \alpha; & y = -N \cos B. \end{array}$$

Прямоугольные координаты x, y точек проекции трехосного эллипсоида на поверхности вспомогательного конуса можно получить из совместного решения уравнений образующей конуса и визирного луча.

Уравнение визирного луча gA запишется:

$$(x - D \sin \alpha)(-N \cos B - D \cos \alpha) = (y - D \cos \alpha)(N(1-p^2) \sin B - D \sin \alpha).$$

Уравнение образующей конуса:

$$-R(x - R \operatorname{tg} \beta) = -R \operatorname{tg} \beta.$$

Из решения этих уравнений получим формулы прямоугольных координат точек на поверхности вспомогательного конуса в плоскости каждого меридиана:

$$x = ((Rtg\beta + D\cos\alpha tg\beta)(N(1-p^2)\sin B - D\sin\alpha) + D\sin\alpha tg\beta(N\cos B + D\cos\alpha)) / (tg\beta(N\cos B + D\cos\alpha) + N(1-p^2)\sin B - D\sin\alpha); \quad (8)$$

$$y = (x - Rtg\beta) / tg\beta.$$

Прямоугольные координаты вершины вспомогательного конуса x_p , y_p запишутся в виде: $x_p = Rtg\beta$; $y_p = 0$.

На основе общих формул конической проекции и из Рис. 9 формулы прямоугольных координат перспективной конической проекции трехосного эллипсоида на плоскости запишутся в виде:

$$X = \rho_{ю} - \rho \cos\delta; \quad Y = \rho \sin\delta; \quad (9)$$

В этих формулах:

X, Y – прямоугольные координаты точек проекции на плоскости;

x, y – прямоугольные координаты точек проекции в плоскости каждого меридианного сечения;

$\rho = [(x - x_p)^2 + (y - y_p)^2]^{1/2}$ – полярный радиус;

$\delta = C\lambda$ – полярный угол;

$C = \cos\beta$ – параметр проекции.

Получены формулы прямоугольных координат 6-и проекций и из них построено 5. На рис. 11, 12 представлены картографические сетки 2-х из них, рассчитанные для Амальтеи.

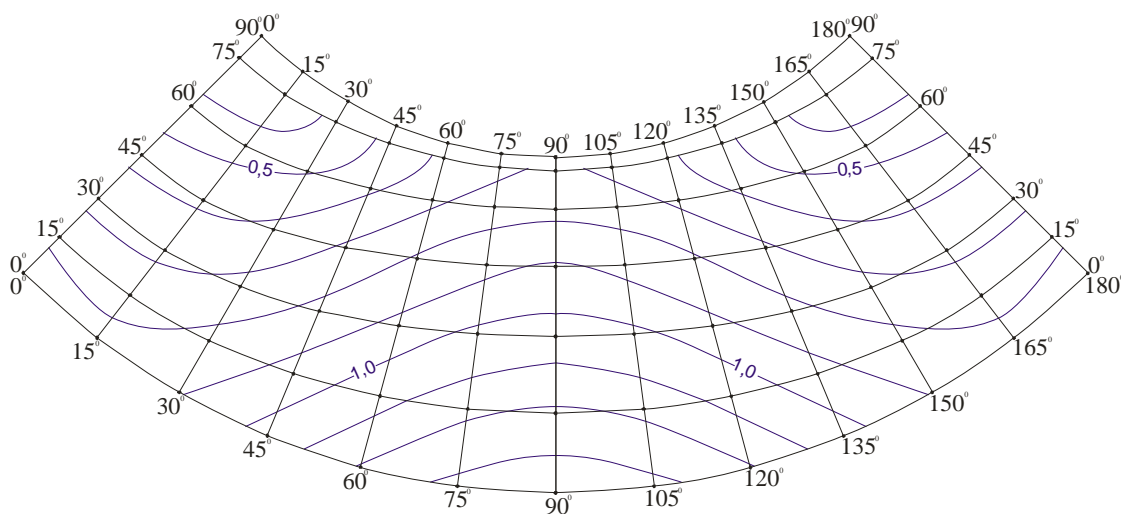


Рис. 11. Сетка перспективной конической проекции с точкой зрения, лежащей в бесконечности с изоколами масштабов площадей

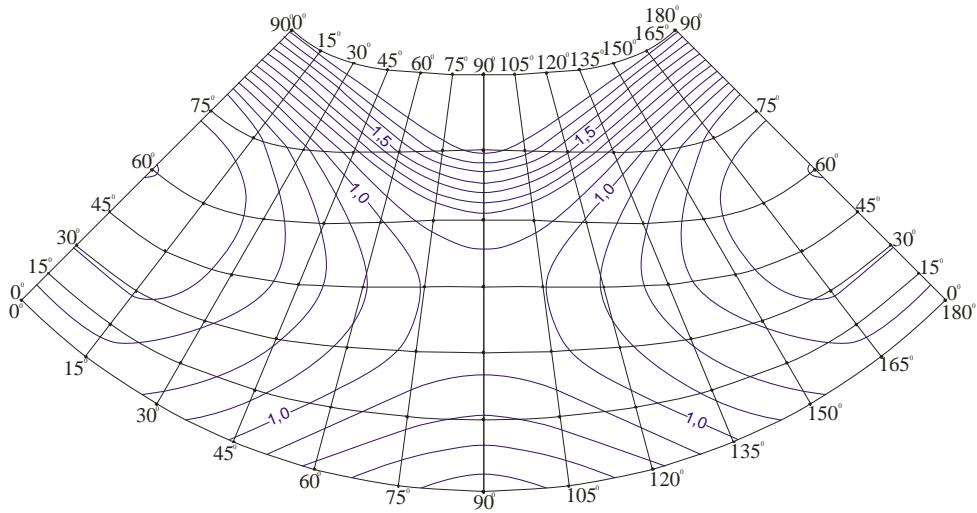


Рис. 12. Сетка перспективной конической проекции с точкой зрения, лежащей на поверхности эллипсоида в плоскости экватора с изоколами масштабов площадей

На основании построений и вычисления искажений длин, площадей и углов можно сделать следующие выводы:

- в проекциях параллели изображаются в виде кривых (в некоторых случаях экватор изображается дугой окружности), меридианы изображаются в виде прямых, сходящихся в одной точке;
- сетки проекций не ортогональны;
- в проекциях полюс изображается в виде дуги окружности;
- сетки проекций симметричны относительно среднего меридиана;
- изоколы масштабов площадей и искажений углов имеют вид кривых.

Для выявления характера искажений проекций был проведен анализ по критериям Г. И. Конусовой и Эйри, результаты которого представлены в табл. 3.

Оценка перспективных конических проекций трехосного эллипсоида по критериям Эйри и Конусовой Табл. 3.

Положение точки зрения		Критерий	
		Эйри	Конусовой (°)
1	В бесконечности	0,158	62
2	В центре эллипсоида	0,238	52
3	На поверхности эллипсоида	0,099	61
4	Произвольное	0,181	55

Критерий Эйри показывает что, наибольшие искажения наблюдаются в проекциях с точкой зрения, лежащей в центре трехосного эллипсоида. Наименьшие искажения – в проекциях с точкой зрения на поверхности трехосного эллипсоида в плоскости экватора. Анализ проекций по критерию Конусовой показал, что проекции произвольны по характеру искажений.

Были также рассчитаны варианты комбинированных проекций с различным значением коэффициентов K_1 и K_2 . Динамика критериев Г. И. Конусовой и Эйри при получении комбинированных проекций представлена на рис. 13

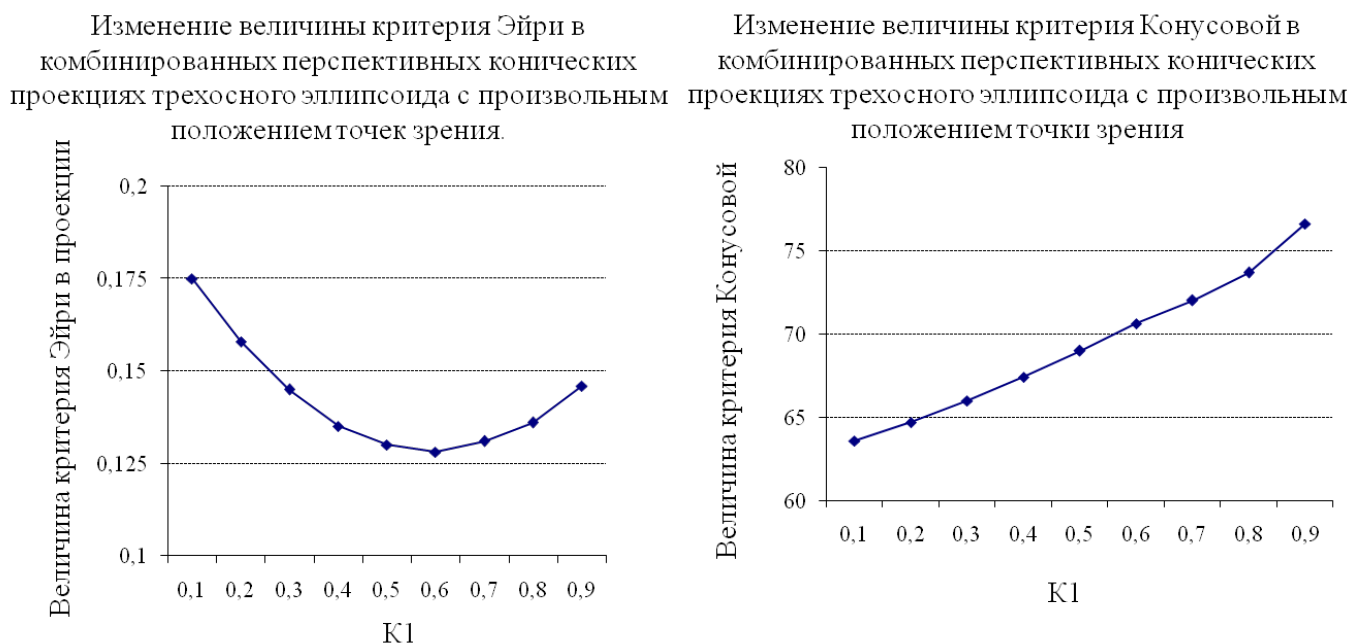


Рис. 13. Изменение критериев Г. И. Конусовой и Эйри в зависимости от изменения коэффициентов проекции

Оптимальной в соответствии с критерием Эйри, является проекция, полученная комбинацией конических проекций с негативным (K_1) и позитивным (K_2) изображениями, в соотношении $K_1 = 0,6$ и $K_2 = 0,4$. С увеличением доли проекции с негативным изображением характер искажения приближается к равновеликому. Картографическая сетка комбинированной проекции представлена на рис. 14.

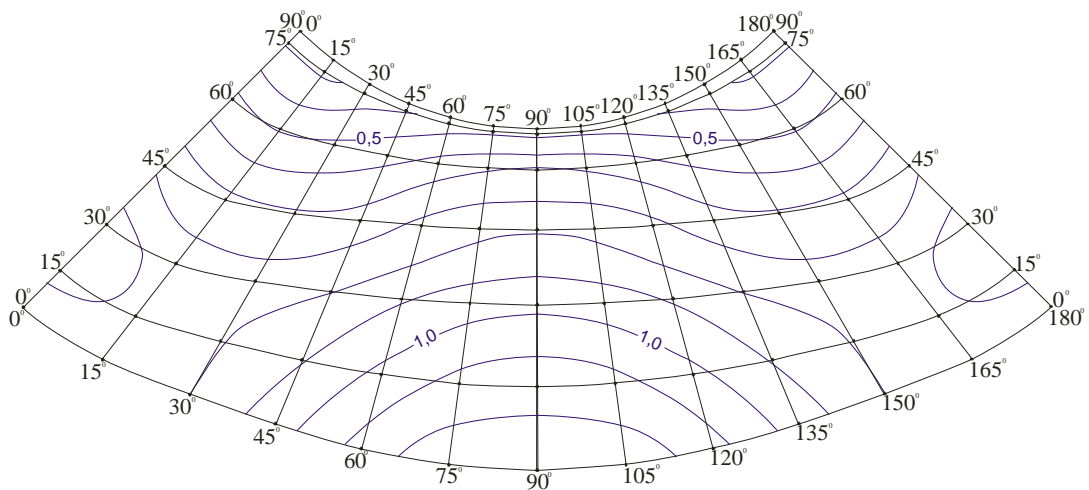


Рис. 14. Картографическая сетка комбинированной перспективной конической проекции с точкой зрения, лежащей произвольно, с нанесенными на нее изоколами масштабов площадей

Заключение

В ходе диссертационных исследований решена главная задача – разработана теория перспективных проекций трехосного эллипсоида разных классов, подтвержденная вычислениями координат и искажений, а также построением картографических сеток. Основные результаты исследований состоят в следующем:

- разработаны перспективные цилиндрические проекции эллипсоида вращения, дополняющие существующие классы (азимутальные и конические), что дает возможность представить теорию перспективных проекций эллипсоида вращения в законченном виде;
- определена методика получения перспективных проекций трехосного эллипсоида разных классов, базирующаяся на общей теории перспективных проекций (метод визирования);
- впервые получены формулы различных вариантов перспективных цилиндрических и перспективных конических проекций трехосного эллипсоида;
- разработаны комбинированные проекции эллипсоида вращения и трехосного эллипсоида на основе перспективных проекций с позитивным и негативным изображением. Предложен способ определения оптимального соотношения исходных проекций;

- выполнен анализ искажений полученных проекций и их вариантов по различным критериям. Построены картографические сетки.

Все теоретические и экспериментальные исследования выполнены на основе анализа и обобщения отечественного и зарубежного опыта изыскания и применения перспективных проекций.

Основные положения диссертации освещены в следующих работах

автора:

1. Кондрачук А. В. Перспективные проекции разных классов // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2008, №6, с. 57-59.

2. Кондрачук А. В. Перспективные цилиндрические проекции трехосного эллипсоида // Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка. – 2009, №1, с. 90-92.

3. Кондрачук А. В. Общая теория перспективных цилиндрических проекций трехосного эллипсоида. – Сборник статей научн.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, посвященной 229-летию МИИГАиК. Известия вузов. Геодезия и Аэрофотосъемка, 2009. – 100 с. (специальный выпуск)