

На правах рукописи

Романовский Сергей Иванович

Определение нормального поля
с использованием условия Бровара

Специальность 25.00.32 — Геодезия

Автореферат диссертации
на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва 2008

Работа выполнена в Московском государственном университете геодезии и картографии (МИИГАиК) на кафедре высшей геодезии

Научный руководитель: кандидат технических наук, доцент
Огородова Людмила Валентиновна

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Баранов Владимир Николаевич
кандидат технических наук, доцент
Крылов Виктор Иванович

Ведущая организация: Государственный астрономический институт
им. П. К. Штернберга (ГАИШ МГУ)

Защита состоится: 20 ноября 2008 г. в 12 ч. на заседании диссертационного совета Д212.143.03 при Московском государственном университете геодезии и картографии (МИИГАиК) по адресу: 105064, г. Москва, Гороховский пер., 4, МИИГАиК, зал заседания Ученого совета

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИИГАиК

Автореферат разослан: « ____ » _____ 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Ю. М. Климков

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Определение параметров общего земного эллипсоида, т. е. такого «... эллипсоида вращения, который наилучшим образом представлял бы многие астрономо-геодезические измерения, распределенные по земной поверхности...» (Гельмерт), относят к одной из основных задач геодезии. Разным аспектам решения этой задачи посвящены работы многих геодезистов. Ныне общий земной эллипсоид определяют как уровенный эллипсоид, внешнее поле которого определяют четыре фундаментальные постоянные. Три из них — геоцентрическая гравитационная постоянная GM , разность $G(C - A)$ полярного C и среднего экваториального A моментов инерции и угловая скорость ω вращения — существуют у реальной Земли и в настоящее время известны с высокой точностью. Однако существует известный произвол в выборе и определении четвертого параметра, определяющего размеры уровенного эллипсоида. Постоянные, задающие размеры эллипсоида, не относятся к стоксовым постоянным Земли и не могут быть получены непосредственно по измерениям. В связи тем, что общий земной эллипсоид объективно не существует, его определение, по мнению М. И. Юркиной, является не только геодезической, а и философской проблемой.

В 1995 г. В. В. Бровар вместо прямых поисков оптимальной величины четвертого параметра уровенного эллипсоида предложил использовать общее требование, при котором «... возмущающая сила во внешнем пространстве достигает наименьшего значения...». В этом случае модель можно считать оптимальной, а общим земным эллипсоидом будет уровенный эллипсоид оптимального нормального поля. Требование Бровара записывают в виде условия, накладываемого на аномальный потенциал T как гармоническую функцию,

$$I = - \int_S T \frac{dT}{dn} dS = \min, \quad (1)$$

где S — поверхность Земли, n — внешняя нормаль к S . Такой подход объединяет требования к нормальному полю, выдвигаемые при решении как геометрических, так и физических задач, и открывает возможность создания оптимальной универсальной модели. Однако до настоящего времени предложение Бровара не реализовано на практике.

Принятое в геодезии поле уровня эллипсоида не является единственной моделью нормального поля. Наряду с ним в смежных областях естествознания используются и иные модели, более удобные для решения специфических задач различных наук. В настоящей работе предложение Бровара реализовано в широкой постановке и использовано не только для поисков общего земного эллипсоида, а и для построения оптимальных в смысле условия Бровара моделей нормального поля при разных формах его представления.

Степень разработанности проблемы. Попытки использования предложения Бровара предпринимались международным коллективом авторов (М. Бурша, М. И. Юркина, Г. В. Демьянов, Я. Коуба и др.). Однако их работы основаны не на условии, предложенном Броваром, а на видоизмененных условиях, соответствующих аномальному потенциалу с иными аналитическими свойствами. Кроме того, решение построено с учетом измерений только на поверхности океана; в этом случае условие (1) Бровара неприменимо. Задача определения нормального поля, реализующего условие Бровара, до настоящего времени не решена.

Цель исследования: построение оптимального в смысле условия Бровара нормального поля и определение параметров общего земного эллипсоида, гарантирующего минимум интеграла Дирихле во внешнем относительно поверхности Земли пространстве.

Задачи исследования. Для достижения цели исследования были поставлены задачи:

1. получить удобные для минимизации выражения нормального потенциала и интеграла I для разных моделей нормального поля;
2. исследовать геометрию исходного поля уровня эллипсоида на произвольных расстояниях от Земли и установить область существования эллипсоидальных уровенных поверхностей;
3. найти удобную форму представления информации о рельефе поверхности Земли.

Объект исследования: поверхность и внешнее гравитационное поле Земли.

Предмет исследования: поле притяжения и поле силы тяжести эллипсоида вращения и диполя.

Теоретическая, методологическая и информационная база исследования. Теоретическая база — теория ньютоновского потенциала, методология —

определение потенциала притяжения из решения краевой задачи. Задача определения уровенного эллипсоида была поставлена не только как задача определения общего земного эллипсоида, а в более широком смысле: было снято требование близости эллипсоидальной уровенной поверхности к поверхности геоида. Другими словами, уровенная эллипсоидальная поверхность не отождествляется с поверхностью нормальной Земли, а ищется модель нормального поля, наиболее близкого к действительному, в котором единственная возможная эллипсоидальная уровенная поверхность занимает произвольное положение в пространстве. Информационная база — модель EGM96 гравитационного поля Земли и цифровая модель GLOBE земного рельефа.

Научная новизна. Новые научные результаты, полученные в диссертации, состоят в следующем:

1. доказана теорема, обобщающая теорему Маклорена – Лапласа;
2. выяснена геометрия уровенных поверхностей на больших расстояниях от Земли;
3. установлены точные соотношения между параметрами уровенного эллипсоида;
4. определены параметры уровенного эллипсоида, гарантирующего минимум интеграла Дирихле;
5. предложен новый способ определения уровенного эллипсоида по стоксовым постоянным Земли;
6. получены формулы, удобные для вычисления потенциала эллипсоида и диполя;
7. выполнено разложение рельефа до 360-й степени и проведен анализ этого разложения.

Теоретическая и практическая значимость работы. Работа носит исследовательский характер. Полученные результаты дополняют теории уровенного эллипсоида и нормального поля. Найденные выражения для нормального потенциала и силы тяжести предлагаемого нормального поля могут найти применение при вычислениях нормальной высоты и действительного потенциала Земли. Модель земного рельефа целесообразно использовать при глобальных геофизических и геодезических исследованиях.

Реализация результатов работы. Результаты исследования внедрены в учебный процесс МИИГАиК. Модель рельефа Земли в виде разложения по сферическим функциям включена в учебник по высшей геодезии.

Апробация результатов исследования. Результаты исследования докладывались на научных конференциях молодых ученых и аспирантов МИИГАиК (1998, 2001 и 2008 гг.) и на Сагитовских чтениях в ГАИШ МГУ (1997 г.).

Публикации. Основное содержание диссертации опубликовано в 1998 – 2008 гг. в пяти статьях в журнале «Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка» и в сети Интернет.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы, включающего 66 наименований, содержит 19 таблиц и 19 рисунков. Общий объем диссертации — 148 страниц.

Основные результаты, выносимые на защиту:

1. модели оптимального в смысле условия Бровара нормального поля при разных формах его аналитического представления;
2. новый принцип определения уровня эллипсоида;
3. параметры эллипсоида, аппроксимирующего нормальный сфероид $U = W_0$ оптимального поля;
4. обобщенная теорема Маклорена-Лапласа о потенциале притяжения симметричного эллипсоида;
5. обобщенное условие Клеро, устанавливающее предельные значения параметров уровня эллипсоида;
6. модель рельефа Земли в виде разложения по сферическим функциям.

Основное содержание работы

Во **введении** сформулированы цель и задачи исследования — практическое применение предложения Бровара для определения нормального поля.

Первая глава содержит описание аналитических форм задания нормального поля и методов его выбора. Отмечается значение условия (1) Бровара и его преимущество перед использованными прежде условиями, накладываемыми на элементы нормального поля.

Во **второй главе** для потенциала V притяжения эллипсоида вращения на основании решения краевой задачи с краевым условием

$$V_0 = a_{00} + a_{20} P_2(\sin u)$$

найденно выражение

$$V = \frac{GM}{E} \operatorname{arctg} \frac{E}{b} + \frac{5}{2} i \left[3 \frac{G(C-A)}{E^3} - \frac{GM}{E} \right] Q_2 \left(i \frac{b}{E} \right) P_2(\sin u), \quad (2)$$

где b и u — эллипсоидальные координаты, $P_2(x)$ и $Q_2(x)$ — полиномы Лежандра второй степени первого и второго рода соответственно, E — линейный эксцентриситет (половина фокального расстояния), V_0 — потенциал на поверхности эллипсоида, a_{00} и a_{20} — коэффициенты. Потенциал притяжения определен тремя постоянными — GM , $G(C-A)$ и E — и не зависит от размеров эллипсоида. Этот результат сформулирован в виде теоремы, обобщающей теорему Маклорена-Лапласа: *Софокусные эллипсоиды вращения равной массы с равными разностями моментов инерции и симметричным относительно оси вращения и плоскости экватора распределением плотности создают во внешнем относительно наибольшего из них пространстве одинаковое гравитационное поле.*

Формула (2) позволяет получить как частные случаи потенциал притяжения однородного эллипсоида вращения и эллипсоида, уложенного для потенциала силы тяжести.

В третьей главе установлено, что для потенциала притяжения эллипсоида, уложенного для потенциала силы тяжести, коэффициенты a_{00} и a_{20} имеют значения

$$a_{00} = V_p - \frac{\omega^2}{3} (b_0^2 + E^2), \quad a_{20} = \frac{\omega^2}{3} (b_0^2 + E^2),$$

где b_0 — малая полуось эллипсоида, V_p — потенциал притяжения на его полюсе, а потенциал U силы тяжести имеет вид

$$U = \frac{GM}{E} \operatorname{arctg} \frac{E}{b} + \frac{\omega^2}{3} (b^2 + E^2) + \frac{\omega^2}{3} \left[\frac{Q_2 \left(i \frac{b}{E} \right)}{Q_2 \left(i \frac{b_0}{E} \right)} - (b^2 + E^2) \right] P_2(\sin u).$$

Потенциал силы тяжести определен постоянными GM , E , ω и b_0 и зависит от размеров эллипсоида. При $b = b_0$ коэффициент при $P_2(\sin u)$ равен нулю, поэтому потенциал U_0 на поверхности эллипсоида постоянен. При любом другом значении b потенциал зависит от широты u , и поэтому только одна уровенная поверхность потенциала силы тяжести является эллипсоидом вращения.

Эксцентриситет E связан с разностью $G(C - A)$ моментов инерции и распределением массы внутри эллипсоида. Установлены соотношения:

$$0 < G(C - A) < 1/5 GME^2, \quad (3)$$

$$\frac{\omega^2 b_0^3}{GM} \leq \frac{15(3 + e'^2) \operatorname{arctg} e' - 3e'}{e'^3(1 + e'^2)} \leq \frac{5}{2} \frac{\omega^2 b_0^3}{GM},$$

где $e' = E/b_0$. Это точное соотношение, устанавливающее пределы изменения эксцентриситета e' в зависимости от распределения плотности. Оно эквивалентно известному соотношению Клеро. Нижний предел в соотношениях (3) соответствует однородному шару, верхний — однородному эллипсоиду.

При $b = \text{const}$ величины силы тяжести на оси вращения уровенного эллипсоида и в экваториальной плоскости связаны соотношением

$$a\gamma|_{u=\pi/2} + 2b\gamma|_{u=0} = 3\frac{GM}{a} - 2\omega^2 ab. \quad (4)$$

При $b = b_0$ эта формула переходит в формулу Молоденского, устанавливающую связь между силой тяжести на экваторе и полюсе уровенного эллипсоида.

Для общего земного уровенного эллипсоида, заданного первичными постоянными

$$GM = 3,986004418 \cdot 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2},$$

$$J_2 = \frac{G(C - A)}{GMa_0^2} = 1,0826359 \cdot 10^{-3}, \quad (5)$$

$$\omega = 7,292115 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$$

и параметром $a_0 = 6\,378\,137$ м, производные постоянные принимают следующие значения:

$$b_0 = 6\,356\,752,26 \text{ м,}$$

$$E = 521\,854,72 \text{ м,}$$

$$U_0 = 62\,636\,852 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$$

и экваториальная сила тяжести равна нулю при $b = b_n = 42\,161,466 \text{ км}$, т. е. на расстоянии $a_{np} = \sqrt{b_{np}^2 + E^2} = 42\,164,695 \text{ км}$ от оси вращения. Потенциал в этой точке минимален и равен $U_{\min} = 14\,180\,418 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$. Поверхность $U = U_{\min}$ является последней (наиболее удаленной от Земли) замкнутой уровенной поверхностью. Она пересекает ось вращения на расстоянии $b = 28\,107,650 \text{ км}$. В силу свойств потенциала уровенного эллипсоида эта поверхность не может быть эллипсоидом вращения.

Уровенный эллипсоид, сила тяжести на экваторе которого равна нулю, имеет параметры:

$$a_0 = 40\,277,338 \text{ км,}$$

$$b_0 = 27\,030,407 \text{ км,} \quad (6)$$

$$E = 29\,860,024 \text{ км,}$$

а потенциал на его поверхности $U_0 = 14\,023\,117 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$. Как видно, значение эксцентриситета превышает значение малой полуоси.

Сила тяжести γ_p на полюсе эллипсоида (6) согласно формуле (4) при $\gamma|_{u=0} = 0$ равна

$$\gamma_p = 3 \frac{GM}{a_0^2} - 2\omega^2 b_0 = 0,43 \text{ м с}^{-2} = 43 \text{ гал.}$$

Разность силы тяжести на предельном эллипсоиде (6) значительно (на порядок) больше разности силы тяжести на поверхности Земли.

Уровенные поверхности земного гравитационного поля и поверхность эллипсоида (6) приведены на рис. 1.

Таким образом, параметры внешней эллипсоидальной уровенной поверхности потенциала силы тяжести нормальной Земли могут изменяться в пределах, представленных в табл. 1.

Среди этих эллипсоидов находится тот, поле силы тяжести которого наиболее близко к земному гравитационному полю.

Основные результаты, полученные в третьей главе:

1. определены требования, которым должна удовлетворять разность $C - A$ моментов инерции для существования уровенной поверхности в виде эллипсоида вращения и сферы;
2. получено соотношение, связывающее силу тяжести на оси вращения и в экваториальной плоскости, обобщающее формулу Молоденского;
3. установлено точное соотношение между параметрами уровенного эллипсоида, соответствующее приближенному неравенству Клеро;
4. установлены пределы изменения параметров уровенного эллипсоида в зависимости от разности $C - A$ и значения потенциала на его поверхности.

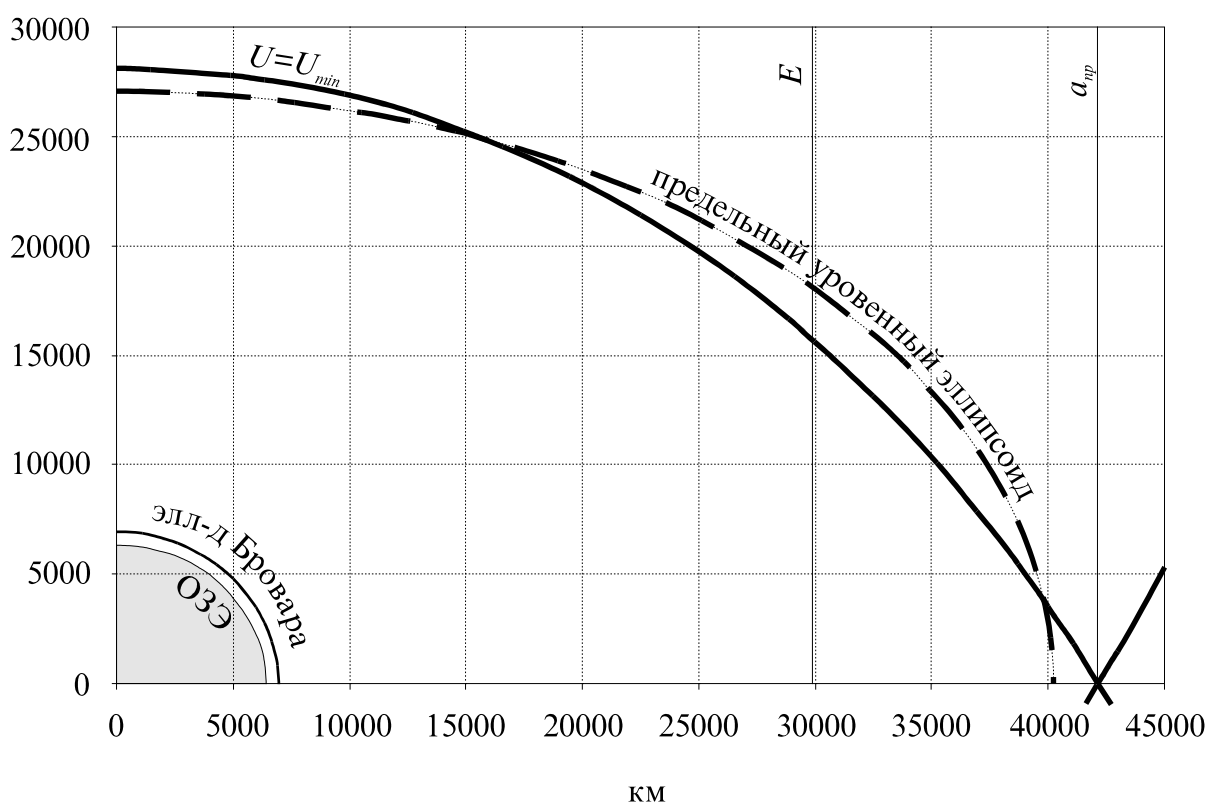


Рисунок 1 — Уровенные поверхности нормального поля

Таблица 1 — Изменение параметров уровенной поверхности в зависимости от потенциала

62 636 852 м ² с ⁻²	$> U_0 >$	14 023 117 м ² с ⁻²
6 378,137 км	$< a_0 <$	40 277,338 км
6 356,752 км	$< b_0 <$	27 030,407 км
521,855 км	$< E <$	29 860,024 км
9,832185 м с ⁻²	$> \gamma_p >$	0,449651 м с ⁻²
9,780325 м с ⁻²	$> \gamma_e >$	0
298,26	$> 1:\alpha >$	3,04

Четвертая глава посвящена выбору нормального поля под условием Бровара в сферическом приближении, а также определению общего земного эллипсоида и нормального поля, заданного стоксовыми постоянными.

Вывод оптимальных в смысле условия Бровара параметров нормального поля в сферическом приближении. Вычисление интеграла (1) для реальной Земли даже для безошибочных измерений связано со значительными трудностями. Это обусловлено, главным образом, сложностью формы поверхности S Земли, вследствие чего в (1) входит производная аномального потенциала не по направлению радиус-вектора или отвесной линии, а по наклонному к ним и нерегулярно меняющемуся направлению. Еще более сложной является задача определения параметров эллипсоида с одновременным уравниванием результатов измерений. Выясним поэтому сначала только те возможности, которые предоставляет изменение параметров эллипсоида. Интеграл I преобразован к виду

$$-\int_S T \frac{dT}{dn} dS = -\int_{\sigma} T \frac{dT}{d\rho} \rho^2 d\sigma + \int_{\sigma} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial h}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial T}{\partial L} \frac{\partial h}{\partial L} \right) T d\sigma, \quad (7)$$

где ρ , φ , L — геоцентрические координаты, h — высота, $d\sigma = \cos \varphi d\varphi dL$, σ — поверхность единичной сферы. Для оценки первого члена

$$I_0 = -\int_{\sigma} T \frac{dT}{d\rho} \rho^2 d\sigma = -R^2 \int_{\sigma} T \frac{dT}{d\rho} d\sigma$$

правой части (7) аномальный потенциал T представлен суммой

$$T = \frac{GM}{\rho} \sum_{n=0}^N \left(\frac{a_e}{\rho} \right)^n \sum_{m=0}^n (\bar{C}_{nm}^* \cos mL + \bar{S}_{nm} \sin mL) \bar{P}_{nm}(\varphi), \quad (8)$$

в которой

$$\bar{C}_{n,0}^* = \bar{C}_{n,0} - \bar{C}_n^H$$

для зональных коэффициентов,

$$\bar{C}_{n,m>0}^* = \bar{C}_{nm}$$

для всех остальных; \bar{C}_n^H — коэффициенты разложения нормального потенциала. Центробежные потенциалы действительной и нормальной Земли считаем одинаковыми, поэтому аномальный потенциал является потенциалом притяжения. В сферическом приближении нормаль n к поверхности Земли совпадает с радиусом-вектором ρ , производная $-dT/dn$ становится чистой аномалией силы тяжести и интеграл I_0 принимает вид

$$I_0 = 4\pi \frac{(GM)^2}{R} \sum_{n=0}^N \left(\frac{a_e}{R} \right)^{2n} (n+1) \bar{D}_n, \quad (9)$$

где

$$\bar{D}_n = \bar{C}_{n,0}^{*2} + \sum_{m=1}^n (\bar{C}_{nm}^2 + \bar{S}_{nm}^2) — \quad (10)$$

степенная дисперсия аномального потенциала. Согласно (9) и (10) интеграл I_0 как сумма квадратов коэффициентов всегда положителен. Это его свойство вытекает из выражения для интеграла Дирихле и подтверждается практическими вычислениями, выполненными Бурша и др.: для всех использованных ими точек поверхности Мирового океана знаки аномалии высоты, т. е. аномального потенциала, и чистой аномалии силы тяжести, т. е. производной $-dT/d\rho$, одинаковы.

Будем считать массы и разность $C - A$ моментов инерции действительной и нормальной Земли совпадающими, начало координат поместим в центр масс Земли. Тогда члены нулевой и первой степени в (8) и (9) и зональный коэффициент $\bar{C}_{2,0}^*$ второй степени равны нулю. При этих условиях вычислим интеграл I_0 для двух

моделей: поля уровня эллипсоида вращения и поля двух неподвижных центров, используя для нахождения дисперсий \bar{D}_n коэффициенты модели EGM96.

Для коэффициентов \bar{C}_n^H потенциала притяжения уровня эллипсоида найдены выражения:

$$\begin{aligned} \bar{C}_{2n}^H &= (-1)^n 3 \frac{(1-n)E^{2n} + 5nE^{2n-2} \frac{G(C-A)}{GM}}{(2n+1)(2n+3)\sqrt{4n+1}a_e^{2n}} = \\ &= (-1)^n 3 \frac{1 - \left(1 - 5J_2 \left(\frac{a_e}{E}\right)^2\right) n}{(2n+1)(2n+3)\sqrt{4n+1}} \left(\frac{E}{a_e}\right)^{2n}, \\ \bar{C}_{2n+1}^H &= 0. \end{aligned}$$

Результат вычислений интеграла I_0 с этими коэффициентами представлен на рис. 2.

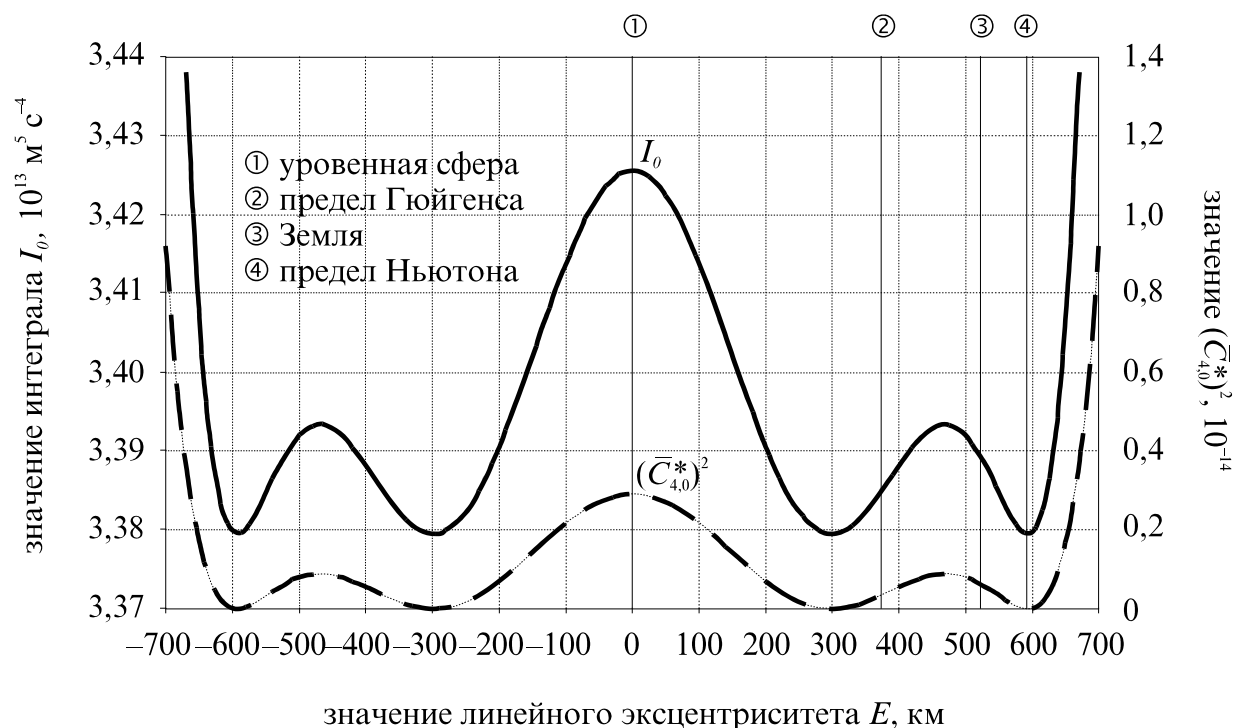


Рисунок 2 — Зависимость интеграла I_0 от линейного эксцентриситета уровня эллипсоида и график функции $(\bar{C}_{4,0}^*)^2$

Точки экстремумов кривой I_0 найдены с помощью условия

$$\frac{dI_0}{dE} = -8\pi \frac{(GM)^2}{R} \sum_{n=2}^{N/2} \left(\frac{a_e}{R}\right)^{4n} (2n+1) \bar{C}_{2n}^* \frac{d\bar{C}_{2n}^H}{dE}, \quad (11)$$

где

$$\frac{d\bar{C}_{2n}^H}{dE} = \frac{(-1)^n 6n(n-1)E^{2n-3}}{(2n+1)(2n+3)\sqrt{4n+1}a_e^{2n}} \left(5 \frac{G(C-A)}{GM} - E^2\right).$$

Выражение (11) сходится очень быстро, стабильный результат получается уже при $N = 8$. При этом члены с $n = 3$ и 4 мало влияют на результат. Производная (11) содержит независимый от степени n множитель

$$5 \frac{G(C-A)}{GM} - E^2 = 5a_e^2 J_2 - E^2,$$

который входит во все члены ряда (11). Поэтому условие $dI_0/dE = 0$ выполняется при

$$5a_e^2 J_2 - E^2 = 0, \quad (12)$$

откуда $E = a_e \sqrt{5J_2}$.

При $J_2 = 1\,082,626684 \cdot 10^{-6}$ и $a_e = 6\,378\,137$ м (EGM96)

$$E = \pm 469\,265,05 \text{ м.}$$

Это значение эксцентриситета соответствует локальному максимуму интеграла I_0 .

Минимума интеграл I_0 достигает при

$$E = 298\,527,97 \text{ м } (b_0 = -5\,024\,643,07 \text{ м})$$

и

$$E = 592\,349,15 \text{ м } (b_0 = 6\,946\,842,74 \text{ м}).$$

В обоих случаях на полюсе эллипсоида (5) потенциал практически одинаков и равен $62\,636\,805,46 \pm 0,42 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$, поэтому для представления нормального поля можно взять любое значение E . Однако, поскольку первое из них приходится на область отрицательных полуосей, для уровенного эллипсоида нормального поля выбран эллипсоид с параметрами

$$E = 592\,349,15 \text{ м,}$$

$$b_0 = 6\,946\,842,74 \text{ м,}$$

названный *минимальным эллипсоидом* или *эллипсоидом Бровара*. Его большая полуось $a_0 = 6\,972\,051,46 \text{ м}$.

Полуоси эллипсоида Бровара — уровенного эллипсоида, соответствующего минимуму интеграла Дирихле, — оказались примерно на 600 км больше полуосей общего земного эллипсоида. На экваторе эллипсоид Бровара проходит на высоте 593,92 км, на полюсе на высоте 590,09 км над Землей. Сжатие эллипсоида Бровара равно 1:277 и значительно больше сжатия земного эллипсоида.

При дипольном представлении нормального поля коэффициенты \bar{C}_n^H имеют вид

$$\bar{C}_n^H = (J_2)^{n/2} \frac{(1+i\sigma)(\sigma+i)^n + (1-i\sigma)(\sigma-i)^n}{2\sqrt{2n+1}(1+\sigma^2)^{n/2}} = (J_2)^{n/2} \frac{(\sigma+i)^{n-1} - (\sigma-i)^{n-1}}{2\sqrt{2n+1}(1+\sigma^2)^{n/2-1}} i,$$

где σ — параметр, определяющий массы и положение центров диполя. Интеграл I_0 достигает минимума при $\sigma = -0,035535671$. Для центрально-симметричного диполя, у которого массы равны и расположены симметрично относительно начала координат, $\sigma = 0$.

Таблица 2 — Сравнение интеграла I_0 для различных моделей нормального поля

	уровенные эллипсоиды		диполи	
	WGS-84 ПЗ-90	Бровара	центрально- симметричный	несиммет- ричный
$I_0, 10^{13} \text{ м}^5 \text{ с}^{-4}$	3,389	3,380	3,383	3,267

Значение минимума интеграла I_0 для несимметричного диполя меньше, чем при использовании эллипсоида Бровара и центрально-симметричного диполя (см. табл. 2). Это объясняется тем, что в первом случае в нормальный потенциал включены и нечетные зональные гармоники, т. е. учтена асимметрия северного и южного полушарий. Поле центрально-симметричного диполя и эллипсоида Бровара

дают практически одинаковое значение минимума интеграла I_0 , увеличенное по сравнению с несимметричным диполем на 3,3%. Для эллипсоида системы ПЗ-90 интеграл I_0 больше по сравнению с несимметричным диполем на 3,6%.

Модели нормального поля, основанные на стоксовых постоянных.

Поскольку коэффициенты \bar{C}_n^H разложения по шаровым функциям потенциалов моделей очень быстро убывают с возрастанием степени n , для выбора нормального поля можно не определять минимум интеграла Дирихле, а обеспечить совпадение начальных коэффициентов модели и реального земного поля. Зональный коэффициент второй степени в разложении аномального потенциала равен нулю. Поэтому для уровненного эллипсоида изменение интеграла I_0 вызваны, в основном, изменением коэффициента $\bar{C}_{4,0}^*$ четвертой степени

$$\bar{C}_{4,0}^* = \bar{C}_{4,0} - \bar{C}_4^H = \bar{C}_{4,0} + E^2 \frac{E^2 - 10 \frac{G(C-A)}{GM}}{35a_e^4}, \quad (13)$$

поскольку коэффициент \bar{C}_6^H не превышает 10^{-2} коэффициента \bar{C}_4^H и его изменение не может заметно повлиять на аномальный потенциал и интеграл I_0 . Зависимость квадрата коэффициента $\bar{C}_{4,0}^*$ от эксцентриситета представлена на рис. 2. Как видно, характер изменения интеграла I_0 и квадрата коэффициента $\bar{C}_{4,0}^*$ одинаков. Согласно (12) все коэффициенты достигают максимума при одном и том же значении эксцентриситета. Точки минимума найдены как точки пересечения кривой $\bar{C}_{4,0}^*$ с осью абсцисс; в этих точках $\bar{C}_{4,0}^* = 0$ и из (13) получаем уравнение, связывающее линейный эксцентриситет E эллипсоида с коэффициентами $\bar{C}_{2,0}$ и $\bar{C}_{4,0}$, решение которого имеет вид

$$E^2 = a_e^2 \left(-5\sqrt{5}\bar{C}_{2,0} \mp \sqrt{125\bar{C}_{2,0}^2 - 35\bar{C}_{4,0}} \right),$$

откуда

$$E_{1,2} = \pm 298\,291,89 \text{ м},$$

$$E_{3,4} = \pm 592\,824,86 \text{ м}.$$

Эти значения близки к значениям, найденным из условия минимума интеграла Дирихле. Использование в качестве четвертого исходного параметра коэффициента $\bar{C}_{4,0}$ снимает неопределенность в выборе уровенного эллипсоида, который вместо исходных постоянных GM , $G(C-A)$, ω , a_0 , или GM , $G(C-A)$, ω , W_0 , основан в данном случае только на реальных стоксовых постоянных Земли и угловой скорости ее вращения

$$GM, G(C-A), D_{4,0}, \omega, \quad (14)$$

где $D_{4,0}$ — зональная стоксова постоянная четвертой степени в разложении потенциала земного притяжения. Уровенный эллипсоид, основанный на четырех первичных постоянных (14), определяется однозначно; неточность его параметров явится следствием только ошибок этих постоянных.

Коэффициенты разложения потенциала притяжения центрально-симметричного диполя не зависят от параметра σ и содержит только два параметра — GM и $G(C-A)$ (или J_2). Его нормированные коэффициенты определены только параметром J_2 .

Несимметричный диполь содержит уже три параметра; его коэффициенты включают параметр σ , который можно найти из условия равенства коэффициентов третьей степени диполя и Земли

$$\bar{C}_3 = -(J_2)^{3/2} \frac{2\sigma}{\sqrt{7(1+\sigma^2)}} = 0,957254173792 \cdot 10^{-6},$$

отсюда $\sigma = -0,035571550$, что несколько отличается от значения, найденного из условия Бровара.

Определение общего земного эллипсоида. Найдем общий земной эллипсоид как эллипсоид, аппроксимирующий уровенную поверхность

$$U_B = const \quad (15)$$

поля эллипсоида Бровара, проходящую вблизи Земли, выбрав его под условием

$$\int_{\sigma} (\rho_0 - \rho_B)^2 d\sigma = \min, \quad (16)$$

ρ_B — радиус вектор уровенной поверхности (15), ρ_0 — радиус-вектор поверхности общего земного эллипсоида. Потенциал U_B на поверхности σ не постоянен. На полюсе и экваторе потенциал эллипсоида Бровара меньше, а на широте 45° больше, чем потенциал U_0 на поверхности уровенного эллипсоида (5). В линейной мере разность $\rho_0 - \rho_B$ составляет +4,7 м на полюсе, -1.9 м на широте 45° и +1,8 м на экваторе. Если же считать потенциал на поверхности эллипсоида (5) постоянным, то поле такого эллипсоида будет далеко от оптимального. Следовательно, соблюдение одновременно обоих требований к общему земному эллипсоиду, а именно

$$\rho_0 - \rho_B = 0 \text{ и } U = U_0 = const$$

для эллипсоида, находящегося вблизи Земли, невозможно. Эти условия выполнены только для эллипсоида Бровара, все остальные уровенные поверхности оптимального в смысле условия (1) поля эллипсоидальными не являются.

Подберем эллипсоид вращения к уровенной поверхности поля эллипсоида Бровара

$$U_B = 62\,636\,857 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2} \quad (17)$$

под условием (16). Экваториальный и полярный радиус-векторы уровенной поверхности (17) соответственно имеют значения

$$(a_0)_0 = 6\,378\,134,65 \text{ м,}$$

$$(b_0)_0 = 6\,356\,747,05 \text{ м}$$

и меньше полуосей эллипсоида (5). Параметры эллипсоида практически одинаковы при аппроксимации как уровенной поверхности оптимального поля, так и уровенной поверхности реальной Земли. Во всех случаях полуось a_0 совпадает с обычно используемой, а сжатие больше.

Результат аппроксимации уровенной поверхности $U = 62\,636\,857 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$ эллипсоидом вращения для разных моделей потенциала дан в табл. 3. На рис. 3 показано взаимное положение эллипсоида Бровара и общего земного эллипсоида, а также отступления от последнего уровенных поверхностей $U = 62\,636\,857 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$ поля эллипсоида Бровара (сфероп Бровара) и зональной части модели EGM96 (сфероид Мещерякова). Высоты этих двух уровенных поверхностей над общим земным эллипсоидом представлены в сильно увеличенном вертикальном масштабе.

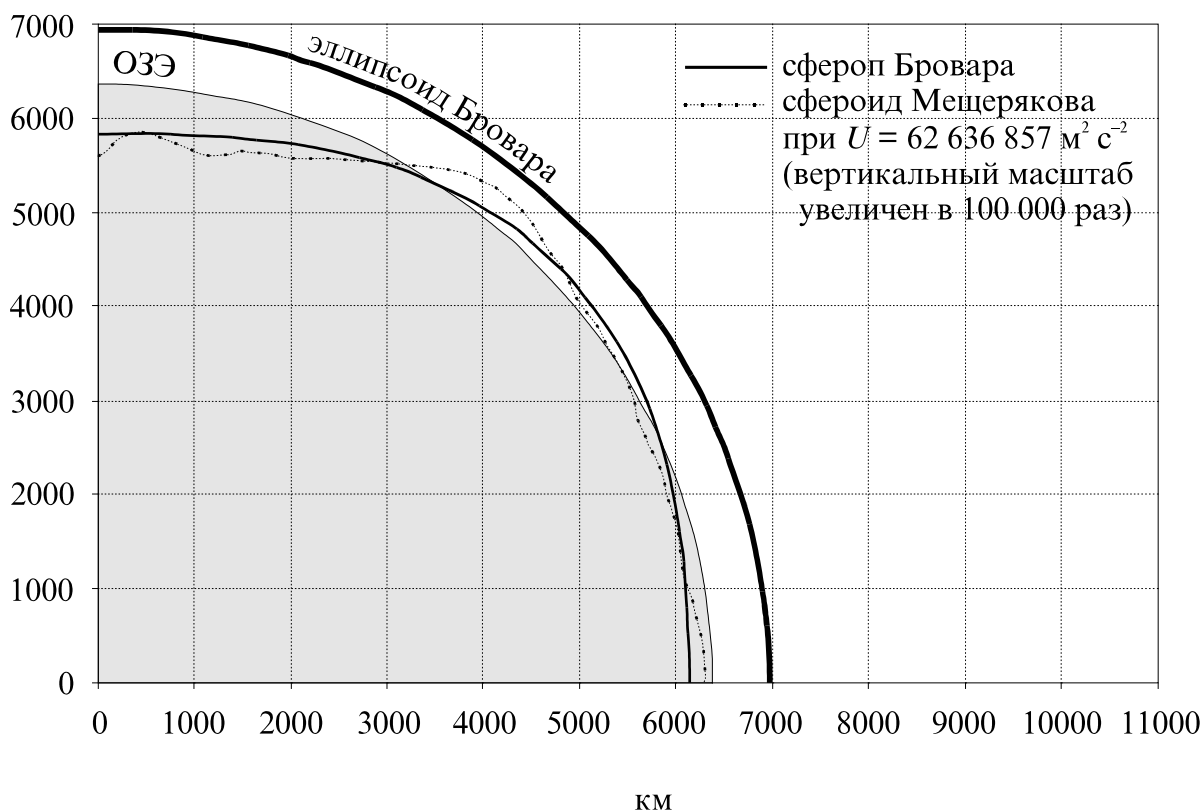


Рисунок 3 — Взаимное положение общего земного эллипсоида, эллипсоида Бровара, а также его сферопа и сфероида по Мещерякову вблизи поверхности Земли

Таблица 3 — Параметры общих земных эллипсоидов, аппроксимирующие уровенные поверхности различных моделей поля силы тяжести

Модель поля силы тяжести, уровенную поверхность которой аппроксимирует эллипсоид	Параметры аппроксимирующего общего земного эллипсоида		
	a_0 , м	b_0 , м	$1:\alpha$
эллипсоид Бровара	6 378 137,24	6 356 749,62	298,216269
зональная часть EGM96 (только четные гармоники)	6 378 137,45	6 356 749,11	298,206382
полная зональная часть EGM96	6 378 137,47	6 356 749,10	298,205978
зональная часть GEM-10C (только четные гармоники)	6 378 137,00	6 356 748,71	298,207

Таблица 4 — Параметры уровневых эллипсоидов

Параметр	Модель потенциала EGM96	Уровневые эллипсоиды		
		WGS-84	ПЗ-90	Бровара
$GM, 10^{14} \text{ м}^3 \text{ с}^{-2}$	3,986004418	3,986005	3,9860044	3,986004418
$E, \text{ м}$	—	521 854,01	521 853,39	592 349,15
$a_0, \text{ м}$	—	6 378 137,00	6 378 136,00	6 972 051,46
$\bar{C}_2, 10^{-6}$	-484,165372	-484,166855	-484,164953	-484,165372
$\bar{C}_4, 10^{-6}$	0,539874	0,790304	0,790296	0,542423
$\bar{C}_6, 10^{-6}$	-0,149958	-0,001687	-0,001687	0,000993
$U_0, \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$	—	62 636 861	62 636 861	57 326 349
$U_{p\oplus}, \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$	—	62 636 861	62 636 851	62 636 806
$U_{45^\circ\oplus}, \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$	—	62 636 861	62 636 852	62 636 871
$U_{e\oplus}, \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$	—	62 636 861	62 636 852	62 636 834
Примечание: $U_{p\oplus}$, $U_{45^\circ\oplus}$ и $U_{e\oplus}$ — значения нормального потенциала на полюсе, широте 45° и экваторе эллипсоида (5) соответственно				

В табл. 4 для сравнения приведены параметры поля эллипсоида Бровара, эллипсоидов основных моделей ГРС-80 и ПЗ-90 модели EGM-96. Как видно, уровневые эллипсоиды ГРС-80 и ПЗ-90 дают коэффициент $\bar{C}_{4,0}$ в полтора раза больше, чем модель EGM96 и эллипсоид Бровара.

Несмотря на существенное различие полуосей эллипсоида Бровара и общего земного эллипсоида, сила тяжести оптимального нормального поля близка к силе тяжести на поверхности общего земного эллипсоида, рассматриваемого как уровневый. Разность значений нормальной силы тяжести рассмотренных моделей не превышает 4 мгл, то есть оптимальная модель дает близкие к земным значения силы тяжести.

Основные результаты, полученные в четвертой главе:

1. выяснено, что наиболее близким к земному гравитационному полю является поле уровненного эллипсоида вращения, проходящего на высоте около 600 км над Землей;
2. получено выражение для силы тяжести поля эллипсоида Бровара;
3. показано, что возможности минимизации аномального поля при использовании нормального поля уровненного эллипсоида вращения ограничены. Меньшие значения интеграла I_0 соответствуют дипольному представлению нормального поля.
4. получены параметры неуровненного общего земного эллипсоида, обеспечивающего наименьшее значение интеграла I_0 .

В пятой главе выполнена приближенная оценка второго члена ΔI в выражении (7)

$$\Delta I = \int_{\sigma} \left(\frac{\partial T}{\partial \varphi} \frac{\partial h}{\partial \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} \frac{\partial T}{\partial L} \frac{\partial h}{\partial L} \right) T d\sigma$$

с использованием разложения высот h физической поверхности Земли по сферическим функциям

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{a}_{nm} \cos mL + \bar{b}_{nm} \sin mL) \bar{P}_{nm}(\varphi).$$

Коэффициенты \bar{a}_{nm} и \bar{b}_{nm} найдены разложением по сферическим функциям до 360-й степени и порядка цифровой модели рельефа GLOBE.

Поправка ΔI представлена в виде $\Delta I = \Delta I_1 + \Delta I_2$,

$$\Delta I_1 = 2\pi \frac{GM}{R} T_{\max} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm} \bar{a}_{nm} + \bar{s}_{nm} \bar{b}_{nm}) (n^2 + n - m^2),$$

где T_{\max} — максимальное значение аномального потенциала, ΔI_2 — член, содержащий произведения полиномов Лежандра разных степеней и тригонометрических функций, обращающихся в нуль при нечетных значениях $n + m$. Для T_{\max} принято значение $\gamma \zeta_{\max} = 10^3 \text{ м}^2 \text{ с}^{-2}$, γ — нормальная сила тяжести, $\zeta_{\max} = 100 \text{ м}$ — максимальная аномалия высоты, тогда

$$\Delta I_1 = 3,93 \cdot 10^{11} \text{ м}^4 \text{ с}^{-4} \times \sum_{n=2}^{360} \sum_{m=0}^n (\bar{c}_{nm} \bar{a}_{nm} + \bar{s}_{nm} \bar{b}_{nm}) (n^2 + n - m^2) = 8,31 \cdot 10^{10} \text{ м}^5 \text{ с}^{-4}.$$

Значение ΔI_1 составляет около 0,25% I_0 , поэтому можно ожидать, что учет влияния рельефа не приведет к качественному изменению полученных в диссертации глобальных оценок. Для более надежной оценки представляет интерес вычисление интеграла I по наземным измерениям с выполнением интегрирования по реальной поверхности Земли.

Основные результаты пятой главы:

1. получены ошибка представительства и дисперсия высоты рельефа Земли;
2. выполнено разложение высот земного рельефа по сферическим функциям в четырех вариантах;
3. найдены значения средней высоты земного рельефа, равное 232 м, и средней квадратической высоты — 636 м;
4. выполнена приближенная оценка влияния рельефа на величину интеграла I .

Заключение

В диссертации представлен первый опыт применения предложения Бровара о выборе общего земного эллипсоида под условием минимума аномального гравитационного поля. Задача Бровара поставлена и решена в более широком смысле, как поиск не только параметров общего земного эллипсоида, но и определения нормального поля, заданного любой моделью. Для практического решения в качестве исходных данных о гравитационном поле Земли использованы коэффициенты модели EGM96, о поверхности Земли — цифровая модель GLOBE.

Основные результаты, полученные в диссертации, состоят в следующем:

1. определен уровенный эллипсоид вращения, поле силы тяжести которого наиболее близко к земному. Этот эллипсоид расположен на высоте 600 км над Землей;
2. получены параметры неуровенного общего земного эллипсоида, обеспечивающего наименьшее значение интеграла I : большая полуось 6 378 137,24 м, сжатие 1:298,216. Сжатие этого эллипсоида заметно больше сжатия эллипсоидов используемых ныне моделей;
3. предложен новый способ определения уровенного эллипсоида;

4. показано, что возможности минимизации аномального поля при использовании нормального поля уровенного эллипсоида вращения ограничены. Меньшие значения интеграла I соответствуют дипольному представлению нормального поля;
5. доказана теорема, обобщающая теорему Маклорена-Лапласа;
6. получено соотношение, связывающее силу тяжести на оси вращения и в экваториальной плоскости, обобщающее формулу Молоденского;
7. установлено точное соотношение между параметрами уровенного эллипсоида, соответствующее приближенному неравенству Клеро;
8. выполнено разложение высот земного рельефа по сферическим функциям в четырех вариантах.

Основное содержание диссертации опубликовано в статьях:

1. Огородова Л. В., Романовский С. И. Применение интеграла Дирихле для выбора нормального поля. // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1998, 6, с. 33 – 46.
2. Романовский С. И. Сила тяжести оптимальной модели Земли. // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 2001, 1, с. 26 – 30.
3. Романовский С. И. Некоторые характеристики цифровой модели GLOBE-98 рельефа Земли и ее спектральных представлений // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 2002, 1, с. 40 – 51.
4. Огородова Л. В., Романовский С. И. Соотношения между параметрами уровенного эллипсоида. // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 2003, 4, с. 15 – 28.
5. Огородова Л. В., Романовский С. И. Уровенный эллипсоид, основанный на стоксовых постоянных. // Известия вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 2008, 4, с. 3 – 6.
6. Романовский С. И. Разложение высот цифровой модели рельефа Земли GLOBE в ряд по сферическим функциям // <http://www.galaxy44.fatal.ru/files/globe98.rar>.

