

БАГРОВ Артем Анатольевич

**РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ПО ИСПОЛЬЗОВАНИЮ
ОСТРОРЕЗОНАНСНОЙ ТЕОРИИ ДВИЖЕНИЯ ИСЗ ДЛЯ
УТОЧНЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ГЕОПОТЕНЦИАЛА**

Специальность 25.00.32 – Геодезия

Автореферат диссертации на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Москва – 2008

Работа выполнена на кафедре Астрономии и космической геодезии
Московского государственного университета геодезии и картографии

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
Яшкин Станислав Николаевич

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
Нейман Юрий Михайлович

кандидат физико – математических наук
Сорокин Николай Антонович

Ведущая организация: 29 НИИ МО РФ

Защита состоится 22 мая 2008 года в 10 часов на заседании диссертационного
совета Д.212.143.03 при Московском государственном университете геодезии
и картографии по адресу: 105064 Москва К – 64, Гороховский пер. д.4,
МИИГАиК, зал заседаний ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИИГАиК

Автореферат разослан 21 апреля 2008 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета

Климков Ю.М.

Общая характеристика работы

Актуальность работы: Уточнение параметров гравитационного поля Земли – одно из фундаментальных направлений в геодезии. Сегодня самые высокоточные технологии в определении коэффициентов разложения гравитационного поля Земли – это методы спутниковой градиентометрии. Максимум точности при определении коэффициентов разложений приходится на порядок, близкий к $n, m \approx 90$ (рис. 1), и уже при $n, m \leq 45$ дает неудовлетворительные результаты.

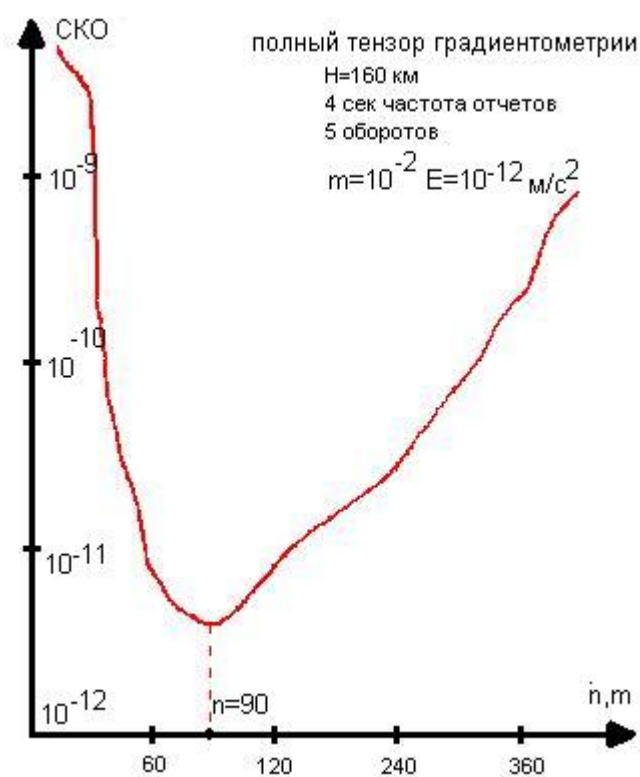


Рис.1. Зависимость СКО определения коэффициентов разложения от степени гармонических коэффициентов

С другой стороны, классические методы динамической геодезии позволяют определять гармонические коэффициенты до порядка $n, m \approx 30$. При $n, m \in [30; 45]$ оба метода дают результаты с погрешностью, неудовлетворяющей современным требованиям. Этот пробел предполагается заполнить методами определения гармонических коэффициентов по

наблюдениям острорезонансных ИСЗ. Кроме того, эти методы могут с успехом использоваться при уточнении коэффициентов $n, m \in [30, 45]$.

Другим важным обстоятельством использования резонансной теории является учет резонансных эффектов ИСЗ, используемых при уточнении моделей гравитационного поля (спутниковая альтиметрия и спутниковая градиентометрия). В частности, в 2002 году в рамках уточнения гравитационного поля Земли были реализованы 2 проекта спутниковой градиентометрии CHAMP и GRACE. Эти спутники, вследствие атмосферного торможения, проходили зону острого резонанса с соизмеримостью $3\sqrt{46}, 5\sqrt{77}, 2\sqrt{31}, 5\sqrt{78}, 3\sqrt{47}$.

Цель диссертационной работы: Опираясь на современный уровень точности в определении коэффициентов гравитационного поля Земли разработать методику по использованию острорезонансной теории движения для уточнения стоксовых постоянных.

Основные задачи исследования:

1 – качественное исследование движения ИСЗ вблизи острого резонанса, и зависимость этого движения от значений резонансного индекса;

2 – исследование на возможность сепарации резонирующих гармоник. Эта проблема возникла в связи с решением задачи, основанной на идеальной резонансной проблеме, и суть ее состоит в следующем: Гамильтониан задачи представляют в виде

$$F = A_1(x) + A_2(x)\cos(y), \quad (1)$$

где x – медленная переменная, y – быстрая, а $A_2(x)\cos(y)$ есть результат следующей операции:

$$A_2(x)\cos(y) = A_m(x)\cos(nl + n\varphi_m) + A_{n+1,n}(x)\cos(nl + (n+1)\varphi_{n+1,n}) + \dots, \quad (2)$$

то есть в амплитуду и период резонансных возмущений входят все гармоники основного резонансного ряда, и как следствие, количество неизвестных больше числа зависимостей;

3 – определение амплитуд и периодов резонансных возмущений в области сепаратрис. Область сепаратрис находится на стыке двух теорий: классической теории возмущений и теории острорезонансных возмущений. С одной стороны, в этой области, классическая теория уже дает неудовлетворительные результаты, а с другой – острорезонансная теория еще не пригодна. Поэтому, такие исследования имеют не только теоретический, но и практический интерес;

4 – построение численных решений движения ИСЗ вблизи острого резонанса, выбор оптимального метода и шага интегрирования. Определения по этому движению основных характеристик движения – амплитуд и периодов, и, как следствие, определение по этим характеристикам соответствующих коэффициентов разложения гравитационного поля Земли. Разработка и описание методики по использованию острорезонансной теории движения. Составление и программная реализация соответствующих алгоритмов.

Научная новизна работы заключается в следующих теоретических и практических достижениях:

– разработаны численные схемы при исследовании на устойчивость по Ляпунову системы дифференциальных уравнений, описывающих резонансное движение;

– на основе теории бифуркаций рассмотрена возможность сепарации возмущений резонансного ряда;

– разработана методика сепарации основного и удвоенного, утроенного и т.д. резонансного ряда;

– получено аналитическое решение дифференциальных уравнений острого резонанса в области сепаратрис;

– на основе численного метода интегрирования Эверхарта, получено численное решение дифференциальных уравнений резонансной орбиты;

– получено решение и численные значения резонансных градиентов для резонансной соизмеримости $2\sqrt{3}1$;

– получен общий вид интерполяционного полинома, построенный на системе линейно независимых функций. В качестве базисных элементов, взята система эллиптических функций Якоби, наиболее полно описывающих резонансную проблему.

Практическая значимость работы заключается, прежде всего, в уточнении значений долготных коэффициентов разложения гравитационного поля Земли. Расчетная точность в определении долготных коэффициентов предполагается быть на уровне точности определения четных зональных коэффициентов динамическими методами по вековым возмущениям.

Исследована численная схема Эверхарта, что позволяет, формально, применять эту схему при интегрировании уравнений движения при решении периодических задач.

Реализация основных результатов: В рамках теории движения вблизи острого резонанса разработан и реализован алгоритм решения дифференциальных уравнений движения. По этой реализации получены основные характеристики резонансного движения – амплитуды и периоды, как основной резонансной последовательности, так и удвоенной. Для реального спутника (проект GOCE) рассчитаны период и амплитуда резонансных возмущений, а также получена зависимость резонансных градиентов от «близости» к острому резонансу. Получена зависимость движения ИСЗ в области сепаратрисы. Разработана и реализована методика определения долготных коэффициентов по наблюдения ИСЗ, имеющих резонансные орбиты.

Все численные расчеты и сложные символьные вычисления производились в программной среде компьютерной математики MatLab.

Апробация работы: Основные результаты работы обсуждались на 62 – й научно – технической конференции МИИГАиК (2007г), а также на заседаниях кафедры «Астрономии и Космической Геодезии» МИИГАиК.

Результаты работы опубликованы в 3 научных публикациях, включенных в перечень ВАК.

На защиту выносятся следующие результаты

1. Результаты качественных исследований дифференциальных уравнений движения вблизи острого резонанса.
2. Разработанные алгоритмы и методы сепарации долготных коэффициентов внутри основной резонансной последовательности.
3. Разработанные алгоритмы и методы сепарации долготных коэффициентов основной и удвоенной, утроенной и т.д. резонансной последовательности.
4. Выведенная функциональная зависимость острорезонансного движения вблизи сепаратрис.
5. Результаты исследования для соизмеримости $2\sqrt{3}1$ (проект GOCE, спутниковая градиентометрия).
6. Разработанная методика определения долготных коэффициентов на основе численного решения методом Эверхарта.

Структура и объем диссертации: Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав основного текста, заключения, списка литературы. Общий объем работы – 100 страниц, включая 10 страниц приложений. Диссертация содержит 20 рисунков и 2 таблицы. Список литературы составил 31 наименование, из них 7 на английском языке.

Краткое содержание работы.

Во введении обоснована актуальность темы, сформулированы цели и основные направления исследований, указана научная новизна, практическая значимость результатов работы, перечислены результаты, выносимые на защиту, приведена структура и объем диссертации.

Глава 1. Качественное исследование уравнений движения.

Основной вопрос, решаемый в данной главе – это поведение системы в окрестности точек покоя. Данное исследование проводится в соответствии с теорией Ляпунова об устойчивости. Применительно к резонансной задаче суть метода следующая.

Пусть имеем систему дифференциальных уравнений вблизи острого резонанса:

$$\begin{cases} \dot{L}_3 = -n \frac{\mu}{2} J_{mn} A_{mn}^{(0,0)} \sin[n(l_3 - \lambda_{mn})] \\ \dot{l}_3 = -\frac{\mu}{2} J_{mn} \cos[n(l_3 - \lambda_{mn})] \frac{\partial A_{mn}^{(0,0)}}{\partial L_3} \end{cases} \quad (3)$$

и рассмотрим линеаризованную систему вблизи точек, удовлетворяющих соотношению:

$$\begin{cases} \dot{L}_3 = -n \frac{\mu}{2} J_{mn} A_{mn}^{(0,0)} \sin[n(l_3 - \lambda_{mn})] = 0 \\ \dot{l}_3 = -\frac{\mu}{2} J_{mn} \cos[n(l_3 - \lambda_{mn})] \frac{\partial A_{mn}^{(0,0)}}{\partial L_3} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Из решения системы (4) находим стационарные точки l_3^0 и $L_3^{(0)}$. Далее, делая замену переменных

$$\Delta l_3 = l_3 - \lambda_{mn}, \quad \Delta L_3 = L_3 - L_3^{(0)} \quad (5)$$

и подставляя новые переменные в линеаризованную систему, получим

$$\begin{cases} \Delta \dot{L}_3 = -n^2 \frac{\mu}{2} J_{mn} A_{mn}^{(0,0)} \cos[n(l_3^{(0)} - \lambda_{mn})] \Delta l_3 - \frac{\mu}{2} J_{mn} \sin[n(l_3^{(0)} - \lambda_{mn})] \frac{\partial A_{mn}^{(0,0)}}{\partial L_3} \Big|_{L_3^{(0)}} \Delta L_3 \\ \Delta \dot{l}_3 = n \frac{\mu}{2} J_{mn} \sin[n(l_3^{(0)} - \lambda_{mn})] \frac{\partial A_{mn}^{(0,0)}}{\partial L_3} \Delta l_3 - \frac{\mu}{2} J_{mn} \cos[n(l_3^{(0)} - \lambda_{mn})] \frac{\partial}{\partial L_3} \frac{\partial A_{mn}^{(0,0)}}{\partial L_3} \Big|_{L_3^{(0)}} \Delta L_3 \end{cases} \quad (6)$$

На основании системы уравнений (6), получим характеристическое уравнение

$$\det \begin{pmatrix} -\xi & -n^2 \frac{\mu}{2} J_{mn} A_{mn}^{(0,0)} \\ -\frac{\mu}{2} J_{mn} \frac{\partial}{\partial L_3} \frac{\partial A_{mn}^{(0,0)}}{\partial L_3} & -\xi \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \xi^2 = n^2 \frac{\mu^2}{4} J_{mn}^2 A_{mn}^{(0,0)} \frac{\partial^2 A_{mn}^{(0,0)}}{\partial L_3^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \xi_{1,2} = \pm \frac{n\mu J_{nn}}{2} \sqrt{A_{nn}^{(0,0)} \frac{\partial^2 A_{nn}^{(0,0)}}{\partial L_3^2}}. \quad (7)$$

В зависимости от знака подкоренного выражения в правой части (7), движение может быть двух типов, а именно: седло и центр.

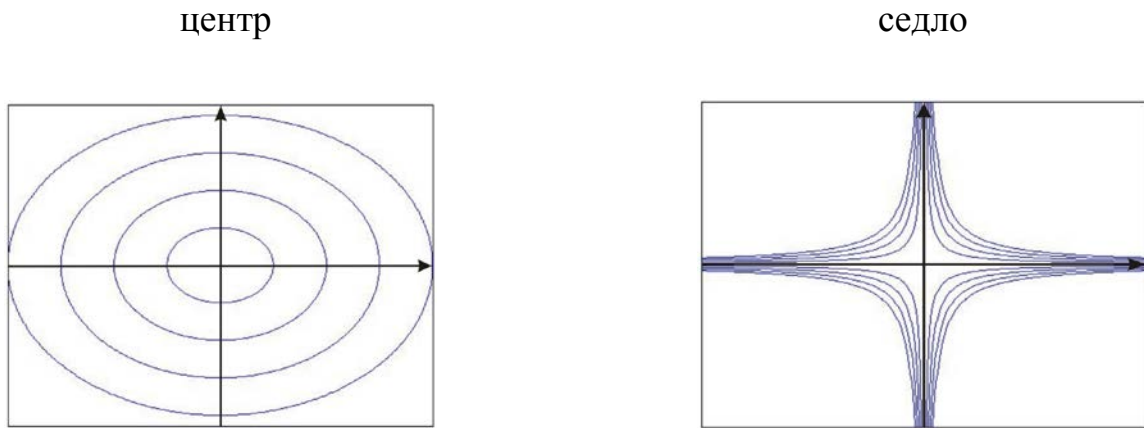


Рис 2. Иллюстративная зависимость фазовых переменных в окрестности точки покоя системы

При проведении численных исследований подкоренного выражения (7) получены следующие результаты:

Таблица 1

Секториальная гармоника	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
знак $A_{nn}^{(0,0)}$	+	-	+	+	+	-	+	+	+	-	+	+	+	-	+
знак $\frac{\partial^2 A_{nn}^{(0,0)}}{\partial L_3^2}$	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-
устойчивость	●		●		●		●		●		●		●		●
неустойчивость		●		●		●		●		●		●		●	

Данные вычислений принесли следующий результат: **резонансное движение с четной соизмеримостью – устойчиво, и наоборот,**

резонансное движение с нечетной соизмеримостью – неустойчиво. На основании этих исследований сделаны следующие выводы: ИСЗ с четной соизмеримостью

$$1/2, 1/4, \dots, 1/14$$

будут находиться в зоне либрации бесконечно большой период времени, в то время как ИСЗ с нечетной соизмеримостью

$$1/3, 1/5, \dots, 1/15$$

за конечный промежуток времени покинет зону либрации.

Глава 2. Методы сепарации в резонансной задаче.

В данной главе исследовано два направления.

1 – *Исследование с использованием аппарата теории бифуркаций.* Теория бифуркаций, систем дифференциальных уравнений, берущая свое начало в работах А. Пуанкаре, описывает качественные, скачкообразные изменения фазовых портретов систем дифференциальных уравнений при непрерывном, плавном изменении их параметров. Значения параметров, при которых происходят эти качественные изменения фазовых портретов, называются бифуркационными значениями или точками бифуркации.

Бифуркационным параметром в резонансной задаче служит выражение (7), которое является функцией коэффициентов гравитационного поля. Как следует из результатов главы 1, в зависимости от знака подкоренного выражения (7) движение может быть либо устойчивым, либо неустойчивым. При переходе ИСЗ из устойчивого состояния в неустойчивое, и наоборот, качественно меняется картина движения. Заметим, что такой переход возможен, если на ИСЗ действует диссипативная сила. Такой силой может быть сопротивление атмосферы (соизмеримость $1/15$), либо такая сила может

вводиться искусственно. Другой фактор, необходимый для реализации данной возможности – значение коэффициента гравитационного поля с большим индексом должно быть больше значения коэффициента с меньшим индексом. Так, для соизмеримости $1 \setminus 15$ $J_{15,15} \approx 1.967 \cdot 10^{-8} < J_{16,15} \approx 3.582 \cdot 10^{-8}$. При выполнении этих двух условий ИСЗ перейдет из устойчивого (неустойчивого) состояния в неустойчивое (устойчивое), то есть пройдет точку бифуркации. По значениям резонансных переменных, на момент бифуркации определяются значения коэффициентов, присутствующих в правой части (7).

Для наглядности, рассмотрим схематический рис.3, где a – величина большой полуоси ИСЗ, $1 - 1'$ – зона либрации, соответствующая основной резонансной последовательности, $2 - 2'$ – зона либрации, соответствующая удвоенной резонансной последовательности и т.д.

Применительно к резонансным возмущениям дело обстоит следующим образом. Пусть ИСЗ находится в зоне либрации между точками 1 и 2 ($1'$ и $2'$) рис. 3, при этом резонируют гармоники n,n ; $n+1,n$; $n+2,n$; $n+3,n$; и т.д. При переходе через точку 2 ($2'$) в резонанс входят удвоенные гармоники $2n,2n$; $2n+1,2n$; $2n+2,2n$; $2n+3,2n$; и т.д.

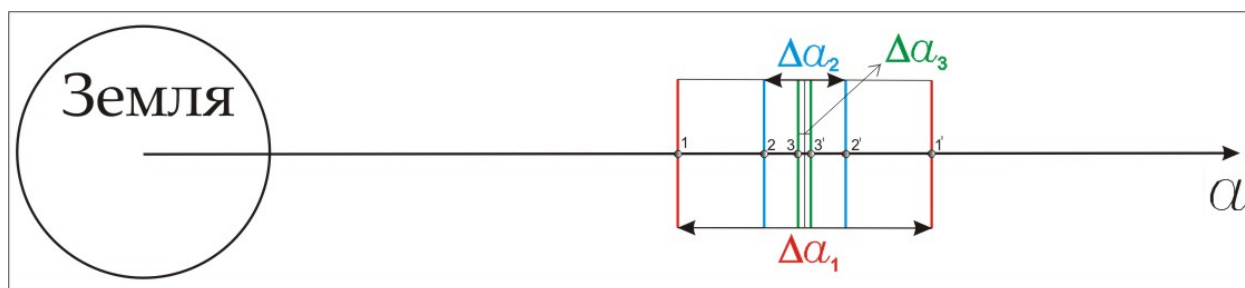


Рис.3. Зависимость зоны либрации от индекса резонансной гармоники

2. – Исследование на основе общей и идеальной резонансной проблемы

Решение идеальной резонансной проблемы есть решение, учитывающее возмущения для фиксированного второго индекса. Так, при соотношении средних движений ИСЗ и Земли, равным $1/n$, в возмущении будут учитываться коэффициенты с индексами $n,n; n+1,n; n+1,n+2,n; \dots; n+m,n; \dots$. Таким образом, рассматривая идеальную резонансную проблему, как задачу первого приближения, можно по возмущениям в элементах орбиты ИСЗ уточнять значения коэффициентов с индексами $n,n; n+1,n; n+1,n; n+2,n; \dots; n+m,n; \dots$. Во втором приближении, учитывая основные и удвоенные резонансные индексы $2n,2n; 2n+1,2n; 2n+1,2n; 2n+2,n; \dots; 2n+k,2n; \dots$, находим возмущения в элементах орбиты. Разность решений общей и идеальной резонансной проблемы дает возможность уточнять значения коэффициентов с удвоенными и т.д. резонансными индексами. Так (рис.4.), для соизмеримости $1/2$ амплитуда разности решений достигает порядка $2000 \left[\frac{M^2}{c} \right]$, а период резонансных возмущений достигает 1600 суток.

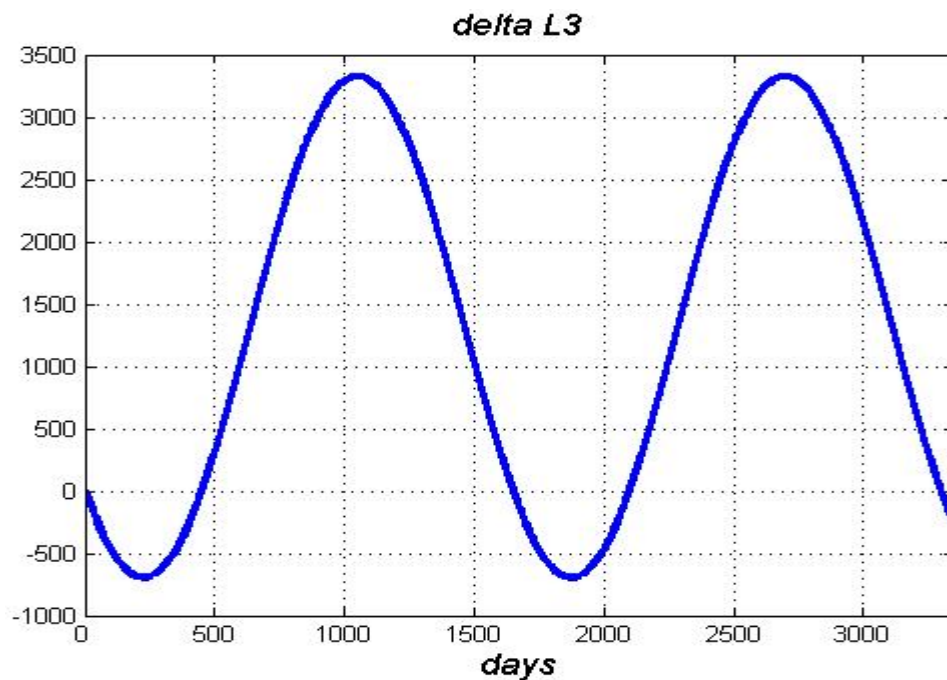


Рис.4. Разность решений общей и идеальной резонансной проблемы.

Соизмеримость $1/2$. По оси ординат даны значения $L_3 \left[\frac{M^2}{c} \right]$

Глава 3. Определение амплитуд и периодов колебаний.

Определение периодов и амплитуд является главным фактором при решении острорезонансной задачи. Это связано с тем, что в период колебаний и амплитуду входят коэффициенты C_m и S_m соответствующих гармоник. Зная функциональную зависимость периода и амплитуды от коэффициентов резонансных гармоник, решается обратная задача по определению долготных коэффициентов.

Пусть мы имеем систему (3). Это система обыкновенных дифференциальных уравнений с двумя степенями свободы. Ее решение выглядит следующим образом:

$$L_3 = L_3^{(0)} + \frac{D_1}{D_2 n} \ln \left[\frac{\cos \{n(l_3^{(0)} - \lambda_m)\}}{\cos \{n(l_3 - \lambda_m)\}} \right], \quad (8)$$

где для удобства введены обозначения $n\mu J_m A_m^{(0,0)} = D_1$, $\mu J_m \frac{\partial A_m^{(0,0)}}{\partial L_3} = D_2$.

Зависимость (8) определена при следующих ограничениях

$$-\frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n} + \lambda_m < l_3 < \frac{\pi}{2n} + \frac{2\pi k}{n} + \lambda_m. \quad (9)$$

То есть, получена область, в которой пригодна данная теория.

Кроме того, исследована зависимость амплитуд и периодов от величины d_m . Эта переменная принималась равной нулю вблизи острого резонанса. При достаточном «расстоянии» ИСЗ от острого резонанса эта переменная уже не может быть равной нулю. На основании этих рассуждений система уравнений (3) примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{L}_3 = -n \frac{\mu}{2} J_m A_{mn}^{(0,0)} \sin[n(l_3 - \lambda_{mn}) + d_{mn}(t - t_0)] \\ \dot{l}_3 = -\frac{\mu}{2} J_m \cos[n(l_3 - \lambda_{mn}) + d_{mn}(t - t_0)] \frac{\partial A_{mn}^{(0,0)}}{\partial L_3} \end{cases} \quad (10)$$

Решения уравнений (10) будут выглядеть следующим образом

$$L_3 = \frac{D_1}{2D_2 n} \ln \left| \frac{a + b + c + d}{e} \right| + L_3^{(0)}, \quad (11)$$

$$l_3 = \frac{1}{n} \arctan \left\{ \tan\{d_{mn}(t_0 - t)\} \frac{\left[\tan \left[\operatorname{Im} \left\{ j\sqrt{D_2 n d_{mn}}(t - t_0) - \arctan \left(\frac{\sqrt{D_2 n z_0}}{\sqrt{d_{mn}}} \right) \right\} \right] \right]}{\left[\tan \left[\operatorname{Re} \left\{ j\sqrt{D_2 n d_{mn}}(t - t_0) - \arctan \left(\frac{\sqrt{D_2 n z_0}}{\sqrt{d_{mn}}} \right) \right\} \right] \right]} \right\} + \lambda_{mn} \quad (12)$$

где

$$\begin{aligned} a &= (D_2 n)^2 \cos\{2(n(l_3 + l_3^{(0)} - 2\lambda_{mn}) + d_{mn}(t - t_0))\}, \\ b &= D_2 n d_{mn} \cos\{2n(l_3^{(0)} - \lambda_{mn})\}, \\ c &= D_2 n d_{mn} [\cos\{2n(l_3 - \lambda_{mn}) + 2d_{mn}(t - t_0)\}], \\ d &= d_{mn}^2, \end{aligned} \quad (13)$$

$$e = (D_2 n)^2 + 2D_2 n d_{mn} \cos\{2n(l_3^{(0)} - \lambda_{mn})\} + d_{mn}^2.$$

Из решения (11) получена амплитуда колебаний

$$A(L_3) = \frac{D_1}{D_2 n} \ln \left\{ \frac{\sqrt{(D_2 n)^4 + (D_2 n d_{mn})^2 - 2(D_2 n)^3 d_{mn} \cos\{2n(\lambda_{mn} + l_3^{(0)})\}} + b + d}{(D_2 n)^2 + 2D_2 n d_{mn} \cos\{2n(l_3^{(0)} - \lambda_{mn})\} + d_{mn}^2} \right\}. \quad (14)$$

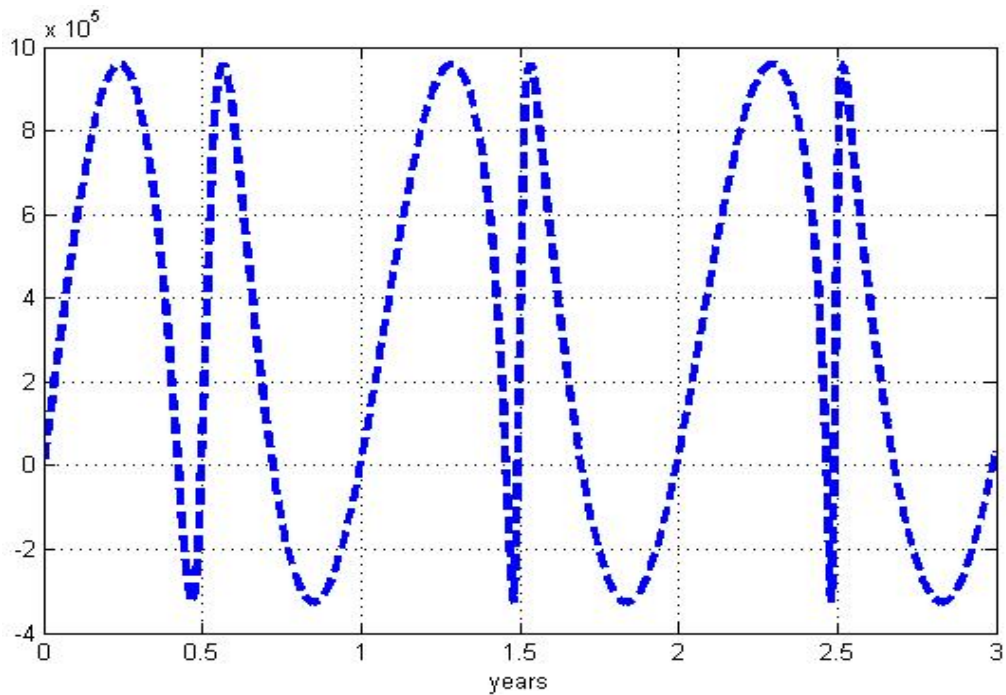


Рис. 5. Зависимость медленной переменной L_3 от времени для R_{22}

Построение решения (рис. 5) проводилось для модельного спутника с соизмеримостью $1\sqrt{2}$. Учтено влияние гармоники R_{22} . По оси ординат – медленная переменная $L_3 \left[\frac{M^2}{c} \right]$.

Глава 4. Численное решение задачи общей резонансной проблемы.

В данной главе обоснован выбор метода интегрирования Эверхарта для решения резонансной задачи. Проведено исследование на устойчивость трехточечной схемы интегрирования. Устойчивость схемы определяется условием:

$$\varepsilon^{n+1} \leq g\varepsilon^n, \quad (15)$$

где ε^n – ошибка на n – ом шаге, а g – множитель перехода от слоя n к слою $n+1$.

Решение неравенства (15) было получено численными методами. В результате решения был сделан вывод: шаг интегрирования не должен превышать 8 суток.

Далее, выбран вид интерполяционного многочлена, наиболее точно описывающий резонансную задачу. В качестве базисных функций выступают эллиптические функции Якоби. Вид эллиптического интерполяционного многочлена следующий:

$$\mathcal{E}_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} f(x_i) \frac{\operatorname{sn} \frac{x-x_0}{2} \operatorname{sn} \frac{x-x_1}{2} \dots \operatorname{sn} \frac{x-x_{i-1}}{2} \operatorname{sn} \frac{x-x_{i+1}}{2} \dots \operatorname{sn} \frac{x-x_{2n}}{2}}{\operatorname{sn} \frac{x_i-x_0}{2} \operatorname{sn} \frac{x_i-x_1}{2} \dots \operatorname{sn} \frac{x_i-x_{i-1}}{2} \operatorname{sn} \frac{x_i-x_{i+1}}{2} \dots \operatorname{sn} \frac{x_i-x_{2n}}{2}}. \quad (16)$$

Кроме того, в результате численного решения резонансной задачи, получены амплитуды и периоды резонансных возмущений для модельных спутников. В возмущении ИСЗ учитывались резонансные гармоники $J_{n,n}$ и $J_{2n,2n}$. Интегрирование производилось методом Эверхарта с восьмиточечным разбиением в подшагах. Шаг интегрирования выбирался из условия

$$\|x_n - y(t_n)\| \rightarrow \min \quad (17)$$

где $y(t_n)$ - точное решение задачи, а x_n - численное решение.

Ниже (табл. 2) приведены результаты численного решения дифференциальных уравнений движения острого резонанса. Элементы орбиты ИСЗ были выбраны следующие: $e=0.01$, $i=30^\circ$

Табл. 2.

Соизмеримость	L_3	Амплитуда ΔL_3	Период (сутки)
1\2	44587837580	24290	6130
1\3	25964986977	132670	577
1\4	17691244208	3580	14322
1\5	13137003951	43955	889
1\6	10300759266	1075	21001
1\7	8385939726	15470	1615
1\8	7017320275	855	22094
1\9	5996634682	10385	1377
1\10	5209966657	920	12420
1\11	4587540056	9430	939
1\12	4084399878	765	12203
1\13	3670371149	14205	685
1\14	3324500774	840	7721
1\15	3031817728	7835	1006

Особое внимание уделено учету и использованию резонансных эффектов в спутниковой градиентометрии. Спутниковая градиентометрия позволяет с высокой степенью точности определять высокочастотные характеристики гравитационного поля Земли.

Отметим следующую особенность движения спутников СНАМР. При движении в верхних слоях атмосферы, эволюция орбиты спутника менялась следующим образом. В первую очередь ИСЗ проходит резонанс 3\46, далее, ограничиваясь наиболее существенными резонансными соотношениями, 5\77, 2\31, 5\78, 3\47. Чтобы продлить время существования спутника, и получить дополнительные измерения, включался двигатель, и орбита приводили в начальное положение. Таким образом, ИСЗ проходил через резонансы 3\46, 5\77, 2\31, 5\78, 3\47 три раза. В данном случае,

использование резонансной теории целесообразно не только в контексте уточнения стоксовых постоянных соответствующих резонансным соизмеримостям, но и в исключении резонансных возмущений при нахождении градиентов гравитационного поля.

В диссертационной работе был произведен численный расчет по исключению резонансных возмущений для спутника СНАМР с соизмеримостью $2\sqrt{3}1$. Гамильтониан задачи имеет следующий вид:

$$F = A_0(x) + A_2(x) \cos(2y), \quad (18)$$

а решение задачи выражается через эллиптические функции Якоби:

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{\mathcal{E}}_0 \mp \bar{Q}_\Sigma k \cdot cn(u, k). \quad (19)$$

где $\bar{\mathcal{E}} = \{a, e, i\}$ – элементы орбиты ИСЗ. В условиях постановки данного вопроса, наиболее важные возмущения возникают в большой полуоси. Это следует из того, что градиент поля равен ускорению ИСЗ вдоль направления большой полуоси. Находим эти градиенты как численно, так и аналитически:

$$\ddot{r}_a = \frac{a(t-\tau) - 2a(t) + a(t+\tau)}{\tau^2} + o(\tau^2) \quad (20)$$

$$\ddot{r} = -A_\Sigma k \cdot sn(u, k) \cdot dn(u, k) \frac{2\pi}{T}. \quad (21)$$

Здесь $T \approx \frac{2K}{\sqrt{Q_m P_m^{(2)}}}$ период резонансных колебаний. Вид функций

$cn(u, k), sn(u, k) \cdot dn(u, k)$ приведён на рисунках 6 и 7.

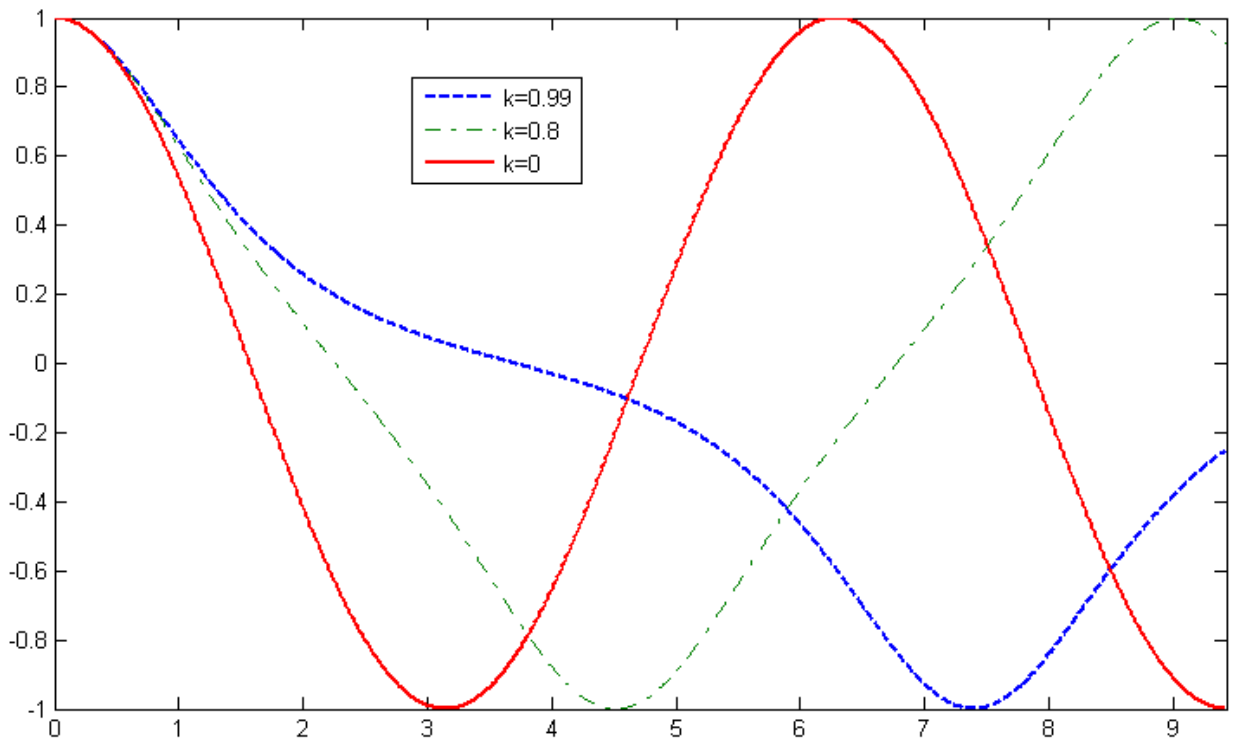


Рис. 6. Вид функции $sn(u, k)$ при различных значениях k

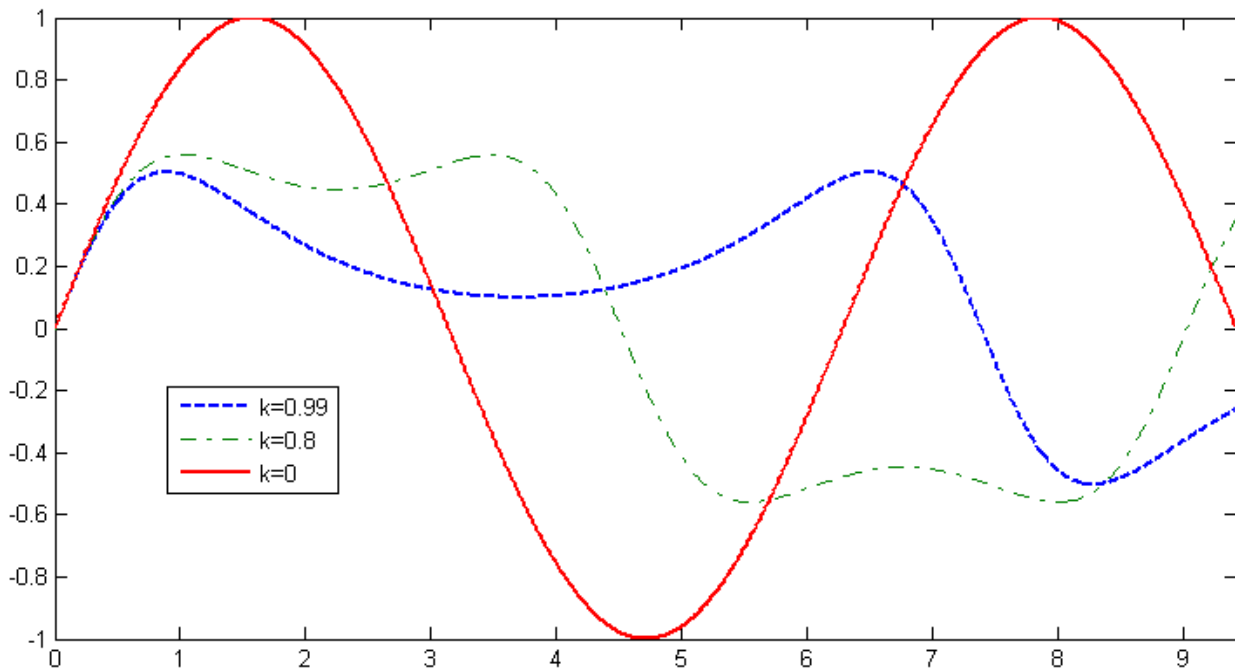


Рис. 7. Вид функции $sn(u, k) \cdot dn(u, k)$ при различных значениях k

В конечном итоге, градиент поля будет рассчитан с учетом резонансных эффектов

$$\ddot{r} = \ddot{r}_a - \ddot{\tilde{r}}_a, \quad (22)$$

где первый член в правой части (22) вычисляется по измеренным наблюдениям в соответствии с (20), а численные оценки для второго члена будут иметь следующий вид:

$$\ddot{\tilde{r}} = 215.319k \cdot \text{sn}\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi, k\right) \cdot \text{dn}\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi, k\right) \frac{2\pi}{T} \quad (23)$$

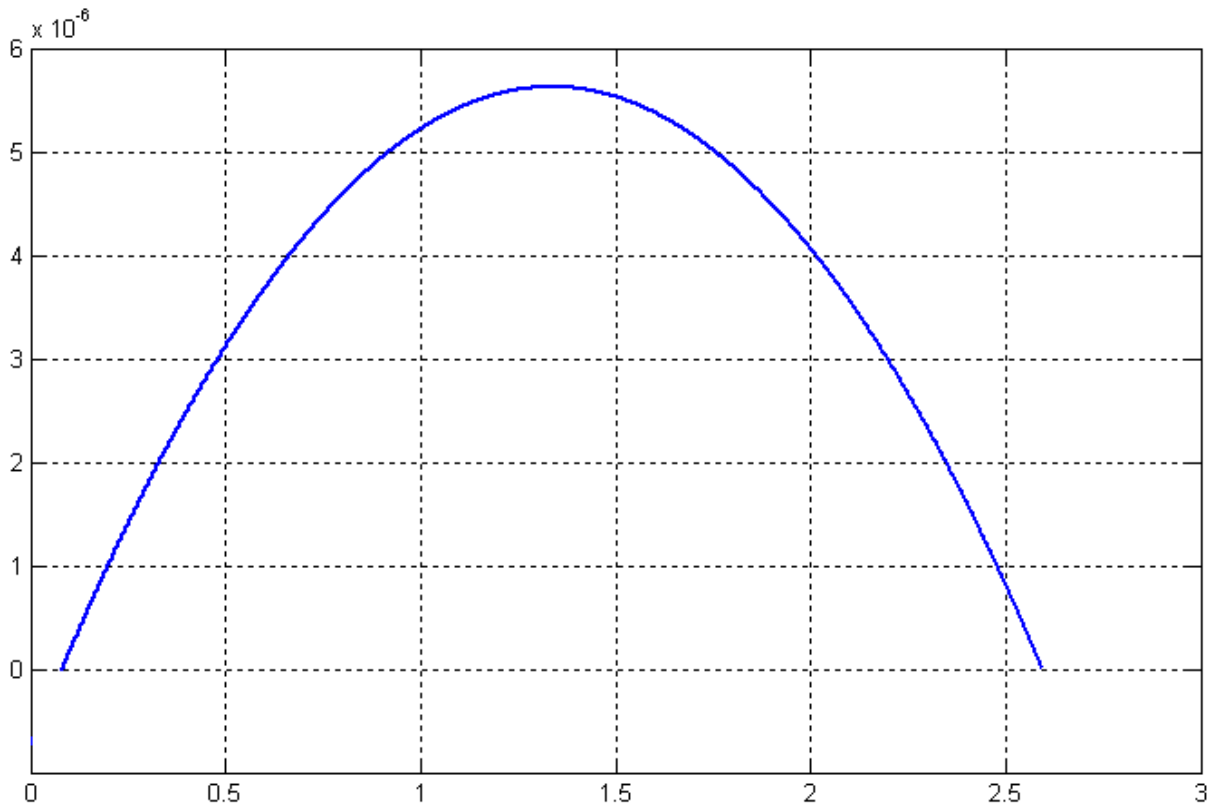


Рис. 8. Резонансные градиенты для соизмеримости 2/31. Размерность по оси ординат – сутки, по оси абсцисс – $[м/с^2]$

И, наконец, рассмотрен вопрос о методике подхода к выбору характера возмущений в элементах орбиты ИСЗ, а также разработаны общие рекомендации на основании проведенных исследований:

1. При запуске ИСЗ с нечетной соизмеримостью, начальные условия необходимо задавать таким образом, чтобы спутник находился в зоне либрации максимальное количество времени.

2. При соизмеримости $1\sqrt{13}$, $1\sqrt{14}$, $1\sqrt{15}$ ИСЗ за счет сопротивления атмосферы естественным образом пройдет точку острого резонанса, а также пройдет точки бифуркации. Для достижения максимального эффекта необходимы высокоточные и непрерывные измерения.
3. При соизмеримостях, отличных от $1\sqrt{13}$, $1\sqrt{14}$ и $1\sqrt{15}$, аналогичный эффект может быть достижим, если искусственно ввести диссипацию.
4. В общем случае, по наблюдениям острорезонансного ИСЗ ищется эллиптический многочлен, по которому и определяют долготные коэффициенты разложения гравитационного поля Земли.

Отдельно рассмотрен вопрос о возможности сепарации резонансных возмущений и методики определения коэффициентов гармоник по этим же возмущениям. Порядок действий при этой процедуре следующий:

1. Проводят сепарацию гармонических коэффициентов внутри основной резонансной последовательности, на основании идеальной резонансной проблемы.
2. Для удвоенной, утроенной и т. д. резонансных последовательностей проводят сепарацию, благодаря реализации численных методов и решения этими методами общей резонансной проблемы.

В Заключении сформулированы основные результаты, полученные автором в диссертации.

Основные теоретические и практические разработки, выполненные в диссертационной работе

1. Проведено качественное исследование дифференциальных уравнений движения вблизи острого резонанса. Определены зоны устойчивости и неустойчивости ИСЗ в зависимости от соизмеримости вращения Земли и спутника, а также от порядкового номера резонансного коэффициента.

2. Исследована возможность сепарации резонансного ряда, как по отдельным резонансным коэффициентам, так и по всему ряду индексов.
3. Получено аналитическое решение резонансной проблемы вблизи сепаратрисы. По этому решению найдены амплитуды и периоды резонансных колебаний.
4. Составлен и реализован алгоритм численного решения дифференциальных уравнений движения острорезонансной задачи методом Эверхарта. По этому решению получены основные резонансные характеристики движения – амплитуды и периоды.
5. Применительно к данной задаче, проведено исследование численной схемы интегрирования на устойчивость, ошибку аппроксимации и найден оптимальный шаг интегрирования.
6. Найден интерполяционный многочлен, наиболее точно описывающий резонансную задачу. Этот многочлен построен на эллиптических функциях Якоби.
7. Получено решение и численные значения резонансных градиентов для резонансной соизмеримости $2\sqrt{3}1$.
8. Разработаны рекомендации по применению резонансных спутников с целью уточнения долготных коэффициентов гравитационного поля Земли.

Публикации по теме диссертации

1. Багров А.А. Исследования устойчивости движения ИСЗ в случае острого резонанса. Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка, №5, 2007, с.73 – 80.
2. Багров А.А. Обоснование применения численных методов для построения резонансной орбиты. Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка, №5, 2007, с.81 – 85.
3. Багров А.А. Определение амплитуд и периодов колебаний для острорезонансного случая. Известия ВУЗов. Геодезия и аэрофотосъемка, №6, 2007, с.68 – 77.