Основные понятия физической геодезии

1. Естественная система координат.

$$W = V + Q = k \iiint\limits_{\text{Земля}} \frac{\gamma}{r} d3 + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2), \quad \text{единицы измерения } \frac{см^2}{c^2}$$

$\Delta W = -4\pi G\gamma + 2\omega^2$, то есть W функция негармоническая, но потенциальная.
В каждой точке P земной поверхности $З$ измерены вектор силы тяжести $\vec{g}(\varphi, \lambda, g)$ и геопотенциальное число C(P) (приращение потенциала силы тяжести W-W_0). Кроме того, известны угловая скорость вращения Земли ω и общая масса Земли M. Здесь
φ – астрономическая широта (угол $\vec{g}$ с плоскостью экватора);
λ – астрономическая долгота (угол между плоскостями астрономических меридианов данной точки P и начальным; заметим, что $\vec{g}$ и ось вращения Земли в общем случае не пересекаются, а скрещиваются, поэтому плоскость астрономического меридиана образуется пересечением $\vec{g}(P)$ и проходящей через P прямой, параллельной оси вращения);
Вектор $\vec{g}$ выражается в терминах измеренных значений модуля силы тяжести и астрономических координат следующим образом:

$$\vec{g} = \begin{pmatrix} g\, cos\varphi \cos\lambda \\ g\, cos\varphi \sin\lambda \\ g\, sin\varphi \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

W_0 - потенциал силы тяжести на геоиде, то есть на эквипотенциальной поверхности $W \equiv W_0$, ближайшей (в смысле метода наименьших квадратов) к усреднённой (на определённую эпоху) поверхности моря и доступной хотя бы в одной исходной точке P_0 (нуль-пункт, или футшток);
геопотенциальное число

$$C(P) = C_P = W_0 - W_P = \int_{(M)}^{(P)} g \cdot dH = \int_{(P_0)}^{(P)} g \cdot dn \qquad (1.2)$$

можно получить из измерений путём геометрического нивелирования и гравиметрии по любому наземному пути от футштока P_0 (или любой другой точки геоида) до нужной точки P (в потенциальном поле интеграл не зависит от формы контура интегрирования, dn обозначает дифференциал расстояния между уровенными поверхностями).
Требуется определить поверхность Земли и внешний геопотенциал в единой системе координат.
Три числа φ(P), λ(P), C(P) являются координатами точки P в естественной системе координат реального гравитационного поля Земли. При этом геопотенциальное число определяет собой ортометрическую высоту точки над геоидом, то есть длину векторной линии от P до её пересечения с геоидом

$$H_P = \frac{C_P}{\bar{g}}, \qquad (1.3)$$

где среднее значение модуля силы тяжести равно, по определению,

$$\bar{g} = \frac{1}{H_P} \int_{(M)}^{(P)} g \cdot dH. \qquad (1.4)$$

Интегрирование выполняется по упомянутой криволинейной векторной линии реального потенциала силы тяжести, а M - точка пересечения этой линии с поверхностью геоида (то есть с начальной уровенной поверхностью реального поля). Понятно, что положение векторной линии реального геопотенциала и значения силы тяжести на ней можно указать лишь приближённо, что является причиной и неизбежной приближённости ортометрических высот.

Точные вычисления можно производить только в рамках определённой математической модели геопотенциала.

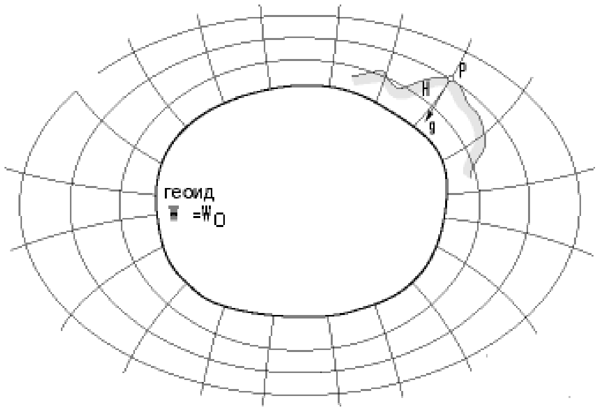

Рис. 1. Уровенные поверхности потенциала силы тяжести *W*.

2. Нормальное поле и теллуроид – главные части реального гравитационного поля Земли и реальной физической поверхности Земли, соответственно.

Вводится модельное поле уровенного эллипсоида $\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ вращения (вокруг малой оси 2b) такого, что :

1) его центр предполагается совмещённым с центром масс Земли;
2) его масса принимается равной массе Земли;
3) вращается вокруг той же оси, что и Земля, с той же угловой скоростью ω ;
4) его поверхность является эквипотенциальной

$$U \equiv U_0 = \frac{GM}{E} arctg \frac{E}{b} + \frac{1}{3}\omega^2 a^2 \approx W_0 \,. \qquad (2.1)$$

Для общеземного эллипсоида большая полуось a = 6 378 137 м, сжатие $f=\frac{a-b}{a}\approx$ 1:298, линейный эксцентриситет $E=\sqrt{a^2-b^2}\approx$ 521 854 м, константа $U_0\approx$ 62 636 852 (м/с)^2.
Внешний потенциал U такого эллипсоида называется нормальным, а $T(P)=W(P)-U(P)$, или $T_P = W_P - U_P$, является гармонической функцией точки P и называется возмущающим потенциалом. Всякое отклонение δM принятой массы Земли от её реального значения приводит к появлению нулевой гармоники $T_0\,(P)$ возмущающего потенциала

$$T_0 = \frac{G\cdot \delta M}{\rho}, \qquad (2.2)$$

где ρ – усреднённая длина радиуса-вектора. В связи с этим отметим, что константа *GM* известна в настоящее время лишь с точностью порядка 10^{-6} (самая неточная константа). Это соответствует ошибке в T_0 , приводящей к систематической погрешности порядка 1 мгал. Все остальные погрешности в организации нормального поля значительно меньше.
$gradU=\vec{\gamma}$ - нормальная сила тяжести; U и γ не зависят от долготы, а только от широты.
$g(P)-\gamma(P)=\delta g(P)$ -- чистая аномалия силы тяжести.
Угол θ между $\vec{g}(P)$ и $\vec{\gamma}(P)$ называется гравиметрическим уклонением отвеса.

Положение точки P на земной поверхности (или вне её) однозначно характеризуется геодезическими координатами *B, L, h* относительно определённого общеземного эллипсоида.

Геодезическая широта B – это угол нормали эллипсоида, проходящей через пределяемую точку, с плоскостью экватора (или плоскостью соответствующей параллели), а геодезическая долгота L – угол между плоскостями геодезических меридианов (то есть осевых сечений эллипсоида плоскостями эллипсов) определяемой точки и начальным. Геодезическая высота h определяется длиной нормали эллипсоида, проходящей через определяемую точку.

По аналогии с естественной системой координат $\varphi,\ \lambda,\ W-W_0$ (или ортометрическая высота) можно пользоваться нормальной системой координат $B_n,\ \Lambda,\ U-U_0$ (или нормальная высота). Здесь нормальная широта B_n есть угол между $\vec{\gamma}$ и плоскостью экватора, нормальная долгота Λ_n -- угол между плоскостью начального меридиана и плоскостью меридиана данной точки. Так как $\vec{\gamma}$ лежит в плоскости геодезического меридиана, то $\Lambda_n = \Lambda$ геодезической долготе. Но нормальная широта B_n отличается от геодезической широты B за счет кривизны векторной линии нормального поля. Можно доказать, что

$B_n = B + 0,''171 \cdot h \cdot \sin 2B,$ где геодезическая высота h выражена в км. (2.3)

В рамках модельного нормального поля все вычисления можно выполнять с любой точностью.

Кроме того, можно построить и некоторую поверхность, которая достаточно хорошо аппроксимирует реальную поверхность Земли. Для этого на реальной поверхности Земли каждой точке P с известными естественными координатами $\varphi,\ \lambda,\ W-W_0$ ставится в соответствие модельная точка Q с нормальными координатами $B_n,\ \Lambda,\ U-U_0$ так, что

$$B_n(Q)=\varphi(P),\quad \Lambda(Q)=\lambda(P),\quad C_P = W_0 - W_P = \int_{(Q_0)}^{(Q)} \gamma \cdot dH^{\gamma} = U_0 - U_Q, \tag{2.4}$$

где dH^{γ} обозначает дифференциал длины дуги векторной линии нормального поля, а под начальной точкой Q_0 следует понимать точку пересечения векторной линии нормального потенциала с поверхностью эллипсоида (то есть с начальной уровенной поверхностью нормального поля).

Множество всех таких точек Q составляет модельную поверхность Земли и называется теллуроидом, разность g(P) – γ(Q) = Δg(P) называется смешанной аномалией силы тяжести, а вектор $\overrightarrow{QP} = \vec{\zeta}$ называется (векторной) аномалией высоты. Длина отрезка MQ векторной линии нормального поля называется нормальной высотой H_P^{γ} точки P и определяется – в отличие от ортометрических высот – точной формулой

$$H_P^{\gamma} = \frac{C_P}{\bar{\gamma}}, \tag{2.5}$$

где среднее значение модуля нормальной силы тяжести, по определению,

$$\bar{\gamma} = \frac{1}{H_P^{\gamma}} \int_{(M)}^{(Q)} \gamma \cdot dH^{\gamma}. \tag{2.6}$$

Если не возникат опасность спутать с ортометрической высотой, то в дальнейшем верхний индекс γ в обозначении нормальной высоты точки P будем опускать и писать просто $H(P)$ или H_P.

Нормальное поле и теллуроид составляют главные части, соответственно, реального гравитационного поля Земли и реальной физической поверхности Земли в том смысле, что остаточное поле – возмущающий потенциал и различные функционалы на нём, в том числе модуль аномалии высоты – оказываются настолько малыми, что их произведениями практически можно пренебрегать. Так

$$\frac{\zeta}{\text{ср.радиус Земли}} \approx \left(\frac{60\ \text{м}}{6\cdot 10^6}\right)^2 = 10^{-10}, \quad \left(\frac{\Delta g}{g}\right)^2 \approx \left(\frac{100\ \text{мгал}}{10^6\ \text{мгал}}\right) = 10^{-8}$$

при реальной точности гравиметрической геодезии порядка 10^{-6}.

Следствием является возможность линеаризации, то есть приращения нормального потенциала и нормальной силы тяжести в окрестности известной точки Q можно заменять соответствующими дифференциаломи. Так,

$$U(P) - U(Q) \approx grad\, U \cdot \overrightarrow{QP} = \vec{\gamma}(Q) \cdot \vec{\zeta} \quad \Rightarrow \quad U(P) \approx U(Q) + \vec{\gamma}(Q) \cdot \vec{\zeta}$$

и потому $T(P) = W(P) - U(P) \approx W(P) - U(Q) - \vec{\gamma}(Q) \cdot \vec{\zeta} = W_0 - U_0 - \vec{\gamma}(Q) \cdot \vec{\zeta}$, так как $W(P) - U(Q) = W_0 - U_0$, согласно (2.4). Но и $T(P) \approx T(Q)$, так как $T(P) - T(Q) \approx grad\, T \cdot \vec{\zeta}$ имеет второй порядок малости. Т аким образом, на теллуроиде

$$T(Q) + \vec{\gamma}(Q) \cdot \vec{\zeta} = W_0 - U_0\,, \tag{2.7}$$

что является обобщением известной формулы Брунса.

Геодезические координаты точек теллуроида приняты равными измеренным астрономичским координатам соответствующих точек земной поверхности. Различие между астрономическими и геодезическими координатами одной и той же точки определяется величиной гравиметрического уклонения отвеса, не превышающего одной минуты. Поэтому можно считать, что соответствующие друг другу пары точек P и Q расположены на одной и той же нормали к эллипсоиду. Это упрощает интерпретацию, и в дальнейшем мы будем оперировать только прямолинейными отрезками нормали.

Вектор $\vec{\gamma}$ отклоняется от нормали вообще не более полутора секунд. Поэтому в формуле (2.7) практически $\vec{\gamma}(Q) \cdot \vec{\zeta} = \gamma(\mathrm{Q}) \cdot \zeta$ и формула Брунса принимает вид

$$\zeta_P = \frac{U_Q - U_P}{\bar{\gamma}} = \frac{W_P - (W_0 - U_0) - U_P}{\bar{\gamma}} \approx \frac{T_P}{\gamma_Q} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma_Q}. \tag{2.8}$$

Здесь $\bar{\gamma}$ - среднее значение модуля нормальной силы тяжести на отрезке QP, γ_Q - значение модуля нормальной силы тяжести в соответствующей точке Q теллуроида.

Таким образом, для вычисления аномалии высоты, помимо нормального поля и возмущающего потенциала, необходимо знать ещё и значение реального потенциала на той поверхности, которая принята за геоид.

Геодезическая высота h_P любой точки P равна сумме её нормальной высоты и аномалии высоты:

$$h_P = H_P^{\gamma} + \zeta_P. \tag{2.9}$$

Основной информацией для вычисления аномалий высоты служит смешанная аномалия смешанная аномалия силы тяжести

$$g(P) - \gamma(Q) = \Delta g(P)\,. \tag{2.10}$$

При этом g(P) получена из измерений, а нормальная сила тяжести на теллуроиде вычисляется по нормальной силе тяжести γ_0 на эллипсоиде посредством нормальной редукции в свободном воздухе

$$\gamma(\mathrm{Q}) \approx \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial H} h_Q\,, \qquad \text{где} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial H} \approx -0{,}3086 \text{ мгал/м.} \tag{2.11}$$

Другая традиционная интерпретация состоит в откладывании от поверхности эллипсоида по нормали аномалий высот точек поверхности Земли. Получаемая при этом поверхность называется квазигеоидом и трактуется как отсчётная поверхность нормальных высот. Таким образом, аномалия высоты $\zeta_P = Q_0 P_0 = QP$ представляет собой геодезическую высоту квазигеоида, а нормальная высота $H_P^{\gamma} = Q_0 Q = P_0 P$, см. рис.1.

Высоты геоида N отличаются от аномалий высот ζ так же, как нормальные высоты отличаются от ортометрических высот, то есть

$$N - \zeta = H^{\gamma} - H = \frac{\bar{g} - \bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} H \approx \frac{\Delta g_B}{\bar{\gamma}}, \tag{2.12}$$

где Δg_B - аномалия Буге. Для точек самого геоида эти различия исчезают, и понятия квазигеоида и геоида совпадают.

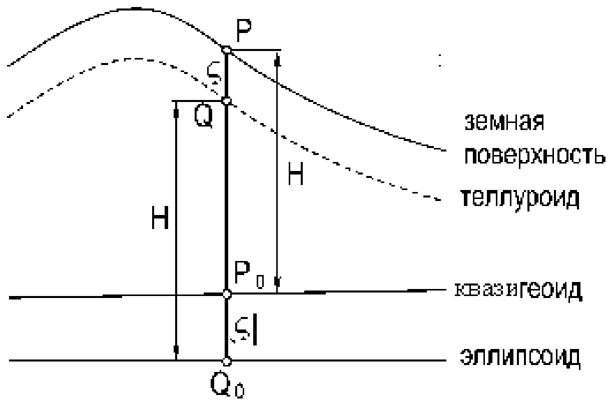

Рис. 2. Геодезическая высота $h = Q_0P$, нормальная высота $H = P_0P = Q_0Q$, аномалия высоты $\zeta = Q_0P_0 = QP$.

Заметим, что, знание аномалии высоты в какой-нибудь точке P на земной поверхности даёт теоретическую возможность определить геопотенциал W_0 на геоиде (в рамках определённой приливно-отливной модели), поскольку, согласно (9) и (10),

$$W_0 = U_0 - \gamma_{Q_0}(h_P - H_P^{\gamma} - T_P/\gamma_Q). \tag{2.13}$$

3. Функционалы на возмущающем потенциале.

Основная задача: найти геодезические координаты точек поверхности Земли и внешний геопотенциал W.
Для этого достаточно знать только возмущающий потенциал T.
Чтобы убедиться в этом, введем топоцентрическую правую систему координат: ось z совпадает с $\vec{\gamma}$, ось x направлена по касательной к меридиану на север, ось y на восток. Положительное отклонение $\vec{g}$ от $\vec{\gamma}$ в плоскости меридиана xPz характеризуется – по договорённости – величиной $-g_x$, а в плоскости первого вертикала yPz – величиной $-g_y$. Поэтому

$$tg\,\xi = -\frac{g_x}{g_z} \approx \xi, \qquad tg\,\eta = -\frac{g_y}{g_z} \approx \eta, \qquad \xi^2 + \eta^2 = \theta^2,$$

так как $\theta < 1'$, а g_x, g_y, g_z обозначают координаты вектора $\vec{g}(P)$. Числа ξ, η обычно выражаются в секундах дуги и называются составляющими уклонения отвеса.
Но $g_x = \dfrac{\partial W}{\partial x} = \dfrac{\partial U}{\partial x} + \dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial x}$, так как $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 0$ (дифференцируем перпендикулярно градиенту $\vec{\gamma}$). Аналогично $g_y = \dfrac{\partial T}{\partial y}$. Поэтому, принимая во внимание, что $g_z \approx \gamma$, имеем

$$\xi \approx -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad \eta \approx -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial y} = -\frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

Отметим также, что

$$\frac{\partial T}{\partial z} = g_z - \gamma \approx g - \gamma = \delta g.$$

Итак

$$B_n = \varphi - \xi = \varphi + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial x},$$

$B_n = B + 0,''171 \cdot h \cdot \sin 2B,$ где геодезическая высота h выражена в км (поскольку угол между $\vec{\gamma}$ и нормалью к эллипсоиду не превышает полутора дуговых секунд, то геодезическую высоту можно заменить высотой нормальной).

).

$$L = \lambda - \eta \sec\varphi = \lambda + \frac{\sec\varphi}{\gamma} \cdot \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$h = H + \zeta = H + \frac{T - (W_0 - U_0)}{\gamma}$$

$$W = U + T$$

$$\zeta = \frac{T}{\gamma} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma}$$

$$\Delta g(P) = \delta g(P) - \frac{\partial \gamma}{\partial H}\zeta, \qquad \text{где} \quad \frac{\partial \gamma}{\partial H} \approx -0{,}3086 \text{ мгал/м}$$

Таким образом, все небходимые понятия представляют собой некоторые функционалы на возмущающем потенциале и потому задача сводится к определению возмущающего потенциала T. Заметим, что все функционалы являются линейными. Это достигается удерживанием при их разложении в ряд Тейлора только линейных членов.

4. Краевая задача со свободной границей и косой производной.

T -- гармоническая функция и находится из решения краевой задачи.

В точке P на Земле

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(W - U) = g(P) - \gamma(P) = -\frac{\partial T}{\partial H} = -\frac{\partial T}{\partial h}.$$

Но γ можно вычислить только в соответственной точке Q теллуроида.

Поэтому последнее слагаемое в выражении

$$\gamma(P) = \gamma(0) + \frac{\partial \gamma}{\partial h}h = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h}(H + \zeta) = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h}H + \frac{\partial \gamma}{\partial h}\zeta = \gamma(Q) + \frac{\partial \gamma}{\partial h}\zeta$$

остаётся неизвестным. Это же слагаемое связывает δg и Δg, так как

$$\delta g(P) = g(P) - \gamma(P) = g(P) - \gamma(Q) - \frac{\partial \gamma}{\partial h}\zeta = \Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial h}\zeta \quad .$$

Следовательно,

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{\partial \gamma}{\partial h}\zeta = -\Delta g(P).$$

Если подставить сюда $\zeta = \frac{T}{\gamma} - \frac{W_0 - U_0}{\gamma}$, то получим краевое условие на поверхности Земли:

$$\frac{\partial T}{\partial h} - \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot \frac{T}{\gamma} = -\Delta g - \frac{\partial \gamma}{\partial h} \cdot \frac{W_0 - U_0}{\gamma}.$$

Дифференцирование здесь выполняется вдоль нормали к эллипсоиду, поэтому можно писать и по *h*, и по *H*, так как их направления одинаковы .

Уравнение похоже по структуре на краевое условие 3-ей краевой задачи. Однако поверхность Земли неизвестна и сама подлежит определению. Кроме того, производная *T* по *H* не является производной по нормали к поверхности Земли. Подобные задачи называют краевыми задачами со свободной границей и косой производной.

5. **Сферическая аппроксимация**

Если пренебречь сжатием эллипсоида и полагать его невращающимся шаром, то $\gamma(P) = G\dfrac{1\times M}{\rho^2(P)}$, а направление геодезической высоты h практически совпадает с направлением радиуса-вектора ρ. Можно доказать, что уклонение радиуса-вектора от нормали эллипсоида не превышает 13 дуговых минут. Поэтому

$$\frac{\partial\gamma}{\partial h}\approx\frac{\partial\gamma}{\partial\rho} = -2\frac{GM}{\rho^2\cdot\rho} = -\frac{2\gamma}{\rho}. \tag{5.1}$$

Кроме того, будем считать, что краевое условие относится не к неизвестной Земле, а к известному теллуроиду. Тогда на теллуроиде

$$\frac{\partial T}{\partial\rho} + \frac{2}{\rho}T = -\Delta g + \frac{2}{\rho}(W_0 - U_0). \tag{5.2}$$

Здесь теллуроид получается откладыванием нормальных высот уже не от эллипсоида, а от сферы, радиус которой обычно определяется из условия равенства объёма соответствующего шара объёму общеземного эллипсоида:

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 = \tfrac{4}{3}\pi a^2 b,\ \text{откуда } \mathrm{R} = (a^2 b)^{1/3} \approx 6371\ \text{км}\cdot \tag{5.3}$$

Это число обычно называется средним радиусом Земли.

Но производная остается "косой", поскольку направление радиуса-вектора не совпадает с направлением нормали теллуроида. Поэтому теллуроид заменяется сферой радиуса R. В результате получаем стандартную третью краевую задачу на сфере

$$\frac{\partial T}{\partial\rho} + \frac{2}{R}T = f(\theta,\lambda), \quad \text{где} \quad f(\theta,\lambda) = -\Delta g + \frac{2}{R}(W_0 - U_0), \tag{5.4}$$

а (ρ, θ, λ) – сферические координаты. При этом сжатие Земли и уклоны её поверхности во внимание не принимаются.

Таким образом, сферическая аппроксимация состоит в том, что в вычислениях вместо реальной точки P с геодезическими координатами B, Λ, h мы формально используем точку P' со сферическими координатами $\theta_{P'} = \pi/2 - B_P$, $\lambda_{P'} = \Lambda_P$, $\rho = R+h$. Как отмечалось выше, это допустимо в линеаризованных соотношениях, связывающих возмущающий потенциал с другими трансформантами, для которых ошибкой порядка сжатия (≈0.3%) можно пренебречь.

6. **Решение геодезической краевой задачи на сфере.**

Решение полученной третьей краевой задачи на сфере имеет вид интегрального преобразования

$$T(\rho,\theta,\lambda) = -\frac{R}{4\pi}\iint_s [St(\rho,\psi) - 1]\, f(\theta',\lambda')ds + \frac{Y_1(\theta,\lambda)}{\rho^2}, \tag{6.1}$$

где интегрирование ведётся по единичной сфере s с центром в начале координат, совмещённым с центром эллипсоида. При этом точка $P(B,\Lambda)$ на эллипсоиде отображается в точку $P'(\theta,\lambda)$ на сфере так, чтобы радиус точки P' был параллелен нормали к эллипсоиду в точке P, то есть чтобы сферические широта и долгота точки P' были равны соответствующим геодезическим координатам точки P.

Ядро преобразования определяет следующая функция, носящая имя Стокса:

$$St(\rho,\psi) = \frac{2R}{r} + \frac{R}{\rho} - \frac{3Rr}{\rho^2}\cos\psi\left(5 + 3\ln\frac{\rho - R\cos\psi + r}{2\rho}\right). \tag{6.2}$$

Здесь r обозначает линейное расстояние между фиксированной точкой вычисления и текущей точкой интегрирования, а ψ - соответствующее сферическое расстояние. Коэффициенты c_{10}, c_{11}, s_{11} сферической функции первой степени $Y_1(\theta, \lambda)$ произвольны. Это означает, что положение начала системы координат не определяется, и решение в прямоугольной системе координат можно получить только с точностью до параллельного переноса. Исходная функция Δg также не должна содержать сферическую функцию первой степени.

На земной сфере $\rho = R$, $r = 2R\sin\frac{\psi}{2}$ и потому

$$T(R,\theta,\lambda) = -\frac{R}{4\pi}\iint_s [St(\psi)-1]\, f(\theta',\lambda')ds + \frac{Y_1(\theta,\lambda)}{R^2}, \tag{6.3}$$

$$St(\psi) = \operatorname{cosec}\frac{\psi}{2} - 6\sin\frac{\psi}{2} + 1 - 5\cos\psi - 3\cos\psi\cdot\ln\left(\sin\frac{\psi}{2} + \sin^2\frac{\psi}{2}\right), \tag{6.4}$$

В нашем случае

$\frac{dy}{dx}2-$

$$f(\theta,\lambda) = -\Delta g + \frac{2}{R}(W_0 - U_0). \tag{6.5}$$

Однако не любая функция может служить исходной информацией для краевого условия. Чтобы убедиться в этом, подставим (6.5) в (6.3) . Получим

$$T(R,\theta,\lambda) = -\frac{R}{4\pi}\iint_s St(\psi)\; f(\theta',\lambda')ds - \frac{R}{4\pi}\iint_s \Delta g(\theta',\lambda')ds + 2R(W_0 - U_0) + \frac{Y_1(\theta,\lambda)}{R^2}, \tag{6.6}$$

или

$$T(R,\theta,\lambda) = -\frac{R}{4\pi}\iint_s St(\psi)\; f(\theta',\lambda')ds - R\Delta g_{cp} + 2R(W_0 - U_0) + \frac{Y_1(\theta,\lambda)}{R^2}, \tag{6.7}$$

где Δg_{cp} обозначает среднее значение Δg на единичной сфере s, а константа

$$-R\Delta g_{cp} + 2R(W_0 - U_0) = T_0 = \frac{G\cdot\delta M}{R}. \tag{6.8}$$

Если $U_0 = W_0$, то

$$\Delta g_{cp} = -\frac{G\cdot\delta M}{R^2}. \tag{6.9}$$

Для общеземного эллипсоида предполагается, что $U_0 = W_0$ и $\delta M = 0$. Следовательно,

$$T(R,\theta,\lambda) = \frac{R}{4\pi}\iint_s St(\psi)\;\Delta g(\theta',\lambda')ds, \tag{6.10}$$

и задача, таким образом, решается только по гравиметрическим данным. Соответствующие функционалы (аномалия высоты, компоненты уклонения отвеса) называются поэтому гравиметрическими.