



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ
(МИИГАиК)

Факультет управления территориями
Кафедра высшей математики



**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 5387FD2AF5B17FED816FDE9A1D4973B1
Владелец: Степанченко Алексей Леонидович
Действителен: с 21.07.2025 по 14.10.2026

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор
А. Л. Степанченко
18 апреля 2025 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
МОДУЛЬ ПРОФИЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ. ПРОЕКТНОЕ
ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВО
«Б1.В.01.06 ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ БИЗНЕС-ПРОЦЕССАМИ»**

Уровень высшего образования: магистратура

Направление подготовки: 38.04.01 Экономика

Направленность(профиль) подготовки: Проектное предпринимательство

Квалификация (степень) выпускника: магистр

Форма обучения: очная

Год набора (приема на обучение): 2025

Срок получения образования: 2 года

Объем:
в зачетных единицах: 4 з.е.
в академических часах: 144 ак.ч.

Москва, 2025

Разработчики:

Доцент кафедры Высшей математики, к.н., доцент Чанга М. Е.

Рабочая программа дисциплины (модуля) составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 38.04.01 Экономика, утвержденного приказом Минобрнауки от 11.08.2020 № 939

Согласование и утверждение

№	Подразделение	Ответственное лицо	ФИО	Виза	Дата, протокол (при наличии)
1	факультет Управления территориями	Председатель ученого совета факультета	Воронцова А. А.	Рассмотрено	19.12.2024, № 2-2024

Содержание

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля)
2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы
3. Место дисциплины в структуре ОП
4. Объем дисциплины и виды учебной работы
5. Содержание дисциплины
 - 5.1. Разделы, темы дисциплины и виды занятий
 - 5.2. Содержание разделов, тем дисциплины и формы текущего контроля
6. Оценочные материалы текущего контроля
7. Оценочные материалы промежуточной аттестации
8. Порядок проведения промежуточной аттестации
9. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины
 - 9.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы
 - 9.2. Профессиональные базы данных и ресурсы «Интернет», к которым обеспечивается доступ обучающихся
 - 9.3. Программное обеспечение и информационно-справочные системы, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине
 - 9.4. Оборудование и технические средства обучения
10. Методические указания по освоению дисциплины (модуля)

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля)

Цель освоения дисциплины - формирование компетенций, позволяющих составить представление о математических моделях процессов управления, об основных задачах вариационного исчисления и теории оптимального управления, и методах их решения

Задачи изучения дисциплины:

- освоение математического аппарата дифференциальных уравнений;
- ознакомление с типовыми задачами вариационного исчисления;
- развитие умений формализации и решения экономических задач оптимального управления.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Компетенции, индикаторы и результаты обучения

УК-1 Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий

УК-1.4 Демонстрирует способности оценивания приоритетности и решения проблемных ситуаций в рамках правового поля

Знать:

УК-1.4/Зн1 Знает нормативно-правовые акты и методологические подходы к формализации и решению проблем управления экономическими процессами

Уметь:

УК-1.4/Ум1 Умеет выбирать и применять при решении проблемных ситуаций методы и приемы оптимального управления бизнес-процессами в рамках правового поля

Владеть:

УК-1.4/Нв1 Владеет навыками решения задач оптимального управления в сфере экономики и бизнеса в рамках правового поля

ПК-1 Способен решать предпринимательские задачи разработки и выполнения бизнес-проектов

ПК-1.4 Решает предпринимательские задачи в части координации и оптимизации бизнес-процессов

Знать:

ПК-1.4/Зн1 Знает методологические подходы к формализации и решению задач оптимального управления бизнес-процессами

Уметь:

ПК-1.4/Ум1 Умеет определять и применять необходимый набор современных методов и приемов при решении задач оптимального управления бизнес-процессами

Владеть:

ПК-1.4/Нв1 Владеет навыками решения задач оптимального управления бизнес-процессами в избранном сегменте предпринимательства

3. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина (модуль) Б1.В.01.06 «Оптимальное управление бизнес-процессами» относится к формируемой участниками образовательных отношений части образовательной программы и изучается в семестре(ах): 4.

В процессе изучения дисциплины студент готовится к решению типов задач профессиональной деятельности, предусмотренных ФГОС ВО и образовательной программой.

4. Объем дисциплины (модуля) и виды учебной работы

Период обучения	Общая трудоемкость (часы)	Общая трудоемкость (ЗЕТ)	Лекционные занятия (часы)	Практические занятия (часы)	Самостоятельная работа (часы)	Промежуточная аттестация (часы)
4 семестр	144	4	22	22	100	Зачет с оценкой
Всего	144	4	22	22	100	

5. Содержание дисциплины (модуля)

5.1. Разделы, темы дисциплины и виды занятий

(часы промежуточной аттестации не указываются)

Наименование раздела, темы	Всего	Лекционные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа	Планируемые результаты обучения, соотношенные с результатами освоения программы
Раздел 1. Оптимальное управление бизнес-процессами	144	22	22	100	УК-1.4 ПК-1.4
Тема 1.1. Дифференциальные уравнения	32	6	6	20	
Тема 1.2. Системы линейных дифференциальных уравнений	32	6	6	20	
Тема 1.3. Вариационное исчисление	38	4	4	30	
Тема 1.4. Теория оптимального управления	42	6	6	30	
Итого	144	22	22	100	

5.2. Содержание разделов, тем дисциплин и формы текущего контроля

Раздел 1. Оптимальное управление бизнес-процессами

Тема 1.1. Дифференциальные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка, его решения, интегральные кривые, задача Коши. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения первого порядка, разрешенного относительно производной. Различные типы уравнений первого порядка и методы их решения: уравнения с разделяющимися переменными, однородные уравнения, уравнения в полных дифференциалах, линейные уравнения, уравнения Бернулли. Дифференциальные уравнения высших порядков, методы понижения порядка.

Текущий контроль

Вид (форма) контроля
Коллоквиум

Тема 1.2. Системы линейных дифференциальных уравнений

Линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка и свойства его решений. Линейная зависимость и независимость функций. Определитель Вронского и его свойства. Фундаментальная система решений и общее решение линейного однородного уравнения. Формула Остроградского-Лиувилля. Линейные неоднородные уравнения и методы поиска частного решения: метод вариации постоянных и случай специальной правой части. Системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, матричный формализм. Фазовые траектории и фазовые портреты. Точки покоя и их классификация: узел, центр, седло, фокус.

Текущий контроль

Вид (форма) контроля
Коллоквиум

Тема 1.3. Вариационное исчисление

Задача о брахистохроне и понятие о вариационном исчислении. Нормы в функциональных пространствах. Сильный и слабый экстремум функционала. Простейшая задача вариационного исчисления. Понятие вариации и лемма Дюбуа-Реймона. Уравнение Эйлера как необходимое условие слабого экстремума. Задача Больца и условия трансверсальности. Задача с подвижными концами.

Текущий контроль

Вид (форма) контроля
Коллоквиум

Тема 1.4. Теория оптимального управления

Динамические системы. Задача управления динамической системой. Оптимальное управление. Вариационные задачи как задачи оптимального управления. Функция Понтрягина. Принцип максимума Понтрягина. Применение принципа максимума в задачах с закрепленными и подвижными концами, в задачах на быстроедействие. Экономическая интерпретация принципа максимума. Применение принципа максимума к решению экономических задач: моделирование поведения потребителя, оптимальное использование энергии с учетом качества окружающей среды, односекторная модель оптимального экономического роста.

Текущий контроль

Вид (форма) контроля
Коллоквиум

6. Порядок проведения промежуточной аттестации

Порядок проведения промежуточной аттестации регламентируется локальными нормативными актами Университета:

- Положением о формах, периодичности, порядке текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по основным образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный университет геодезии и картографии», п.6 «Организация и проведение промежуточной аттестации».
- Положением о порядке осуществления образовательного процесса, проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный университет геодезии и картографии», п.8 «Проведение промежуточной аттестации с применением ЭО и ДОТ».

Промежуточная аттестация: Зачет с оценкой, 4 семестр.

7. Оценочные материалы текущего контроля

Раздел 1. Оптимальное управление бизнес-процессами

Контролируемые ИДК: ПК-1.4 УК-1.4

Тема 1.1. Дифференциальные уравнения

Форма контроля/оценочное средство: Коллоквиум

Вопросы/Задания:

1. Что такое дифференциальное уравнение?
2. Что такое порядок дифференциального уравнения?
3. Какое уравнение называют разрешенным относительно производной?
4. Что такое решение дифференциального уравнения?
5. Какое уравнение называют однородным?
6. Какую подстановку применяют для интегрирования однородного уравнения?
7. Какое уравнение называют уравнением в полных дифференциалах?
8. Что такое интегрирующий множитель?

Тема 1.2. Системы линейных дифференциальных уравнений

Форма контроля/оценочное средство: Коллоквиум

Вопросы/Задания:

1. Какое уравнение называют линейным?
2. Какие существуют методы решения неоднородного линейного уравнения первого порядка?
3. Что такое линейно зависящая система функций?
4. Какова размерность пространства решений однородного линейного уравнения?
5. Что такое фундаментальная система решений (ФСР) линейного уравнения?
6. Что такое характеристическое уравнение?
7. Что такое точка покоя системы линейных дифференциальных уравнений?
8. Какие существуют основные типы точек покоя системы линейных дифференциальных уравнений?

Тема 1.3. Вариационное исчисление

Форма контроля/оценочное средство: Коллоквиум

Вопросы/Задания:

1. Что такое функционал?
2. Что такое экстремаль функционала?
3. Что такое слабый локальный экстремум?
4. Что такое сильный локальный экстремум?
5. Каково необходимое условие слабого экстремума?
6. Что такое допустимая экстремаль функционала?
7. К какому типу задач вариационного исчисления относится задача о брахистохроне?
8. Что такое задача Больца?

Тема 1.4. Теория оптимального управления

Форма контроля/оценочное средство: Коллоквиум

Вопросы/Задания:

1. Что такое динамическая система?
2. Что такое управление?
3. В чем состоит задача оптимального управления?
4. В чем состоит принцип максимума Понтрягина?
5. Что такое задача на быстроедействие?
6. Что такое оптимальный процесс?

8. Оценочные материалы промежуточной аттестации

4 семестр, Зачет с оценкой

Контролируемые ИДК: УК-1.4 ПК-1.4

Вопросы/Задания:

1. Укажите уравнение, которое НЕ является дифференциальным

- а) $yy' = x$
- б) $xy'' = e^x$
- в) $x dy + y dx = 0$
- г) $xy^2 + 2y = x$

2. Укажите какое из уравнений является дифференциальным уравнением первого порядка

- а) $yy'' = x$
- б) $xy'' = y'e^x$
- в) $x dy + y dx = 0$
- г) $xy^2 + 2y''' = x$

3. Укажите какое из уравнений является разрешенным относительно производной

- а) $y' = xy$
- б) $xy' = e^x$
- в) $x dy + y dx = 0$
- г) $x(y')^2 + 2y = x$

4. Укажите какой набор условий ставит задачу Коши для уравнения

$$y'' = xy$$

- а) $y(0) = 1$
- б) $y'(0) = 1$
- в) $y(0) = 1, y(1) = 0$
- г) $y(0) = 1, y'(0) = 0$

5. Укажите какая из функций является решением уравнения

$$y' = y$$

а) $y = 2x$

б) $y = 3e^x$

в) $y = xe^x$

г) $y = 5x^2$

6. Укажите уравнение с разделяющимися переменными

а) $xy' = y^2 \sin x$

б) $y' = 3e^x + y$

в) $2xydx + (x^2 + y)dy = 0$

г) $y' = 5 \ln \frac{y}{x}$

7. Укажите однородное уравнение

а) $xy' = y^2 \sin x$

б) $y' = 3e^x + y$

в) $2xydx + (x^2 + y)dy = 0$

г) $y' = 5 \ln \frac{y}{x}$

8. Укажите линейное уравнение

а) $xy' = y^2 \sin x$

б) $y' = 3e^x + y$

в) $2xydx + (x^2 + y)dy = 0$

г) $y' = 5 \ln \frac{y}{x}$

9. Укажите решение задачи Коши для уравнения с разделяющимися переменными

$$y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}, y(0) = 1$$

а) $y = x^2 + 1$

б) $y = e^x$

в) $y = \frac{1-x}{1+x}$

г) $y = \frac{1+x}{1-x}$

10. Укажите решение задачи Коши для однородного уравнения

$$y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, y(1) = -1$$

а) $y = -x$

б) $y = x^2 - 2$

в) $y = -\frac{2x}{1+x}$

г) $y = 1 - 2x$

11. Укажите общий интеграл уравнения в полных дифференциалах

$$(2x^3 - xy^2)dx + (2y^3 - x^2y)dy = 0$$

а) $x^3 - x^2y^2 + y^4 = C$

б) $x^4 - x^2y^2 + y^4 = C$

в) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = C$

г) $x^4 - x^2y^2 + y^3 = C$

12. Укажите общее решение линейного уравнения

$$y' + 2y = 4x$$

- а) $y = Ce^{-2x} + 2x - 1$
- б) $y = Ce^{-3x} + 2x - 1$
- в) $y = Ce^{-2x} + 3x - 1$
- г) $y = Ce^{-2x} + 2x + 1$

13. Решите задачу

Укажите функцию дохода $Y(t)$, если известна функция потребления $C(t) = 2t$, коэффициент капиталоемкости прироста дохода $b = 0,5$, $Y(0) = 2$ и $Y(t) = bY'(t) + C(t)$

- а) $Y(t) = 2t + e^{2t} + 1$
- б) $Y(t) = t + e^{2t} + 1$
- в) $Y(t) = 2t + e^{2t} + 2$
- г) $Y(t) = 2t + e^t + 1$

14. Решите задачу

Укажите функцию равновесной цены $p(t)$, которая определяется равенством спроса x и предложения y , если $p(0) = 20$, $x = 13 + p(t) + 4p'(t)$, $y = 22 - 2p(t) + 3p'(t)$

- а) $p(t) = 3 + 17e^{-3t}$
- б) $p(t) = 17 + 3e^{-3t}$
- в) $p(t) = 3 + 17e^{-2t}$
- г) $p(t) = 17 + 3e^{3t}$

15. Укажите фундаментальную систему решений уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = 0$$

- а) e^x, xe^{2x}
- б) e^x, xe^x
- в) e^{2x}, xe^{2x}
- г) e^x, e^{2x}

16. Укажите фундаментальную систему решений уравнения

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

- а) e^x, xe^{2x}
- б) e^x, xe^x
- в) e^{2x}, xe^{2x}
- г) e^x, e^{2x}

17. Укажите в каком виде следует искать частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = x^2$$

- а) Ax^2
- б) $Ax^2 + Bx$
- в) $Ax^2 + Bx + C$
- г) $Ax^3 + Bx^2 + Cx$

18. Укажите в каком виде следует искать частное решение дифференциального уравнения

$$y'' - 2y' + 2y = \sin x$$

- а) $A \sin x$
- б) $(Ax + B) \sin x$
- в) $A \sin x + B \cos x$

- в) $A \sin x + B \cos x$
 г) $Ax \sin x$

19. Укажите тип точки покоя системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$$

а) седло
 б) узел
 в) фокус
 г) центр

20. Укажите тип задачи

- А) задача Больца
 б) простейшая задача вариационного исчисления
 в) задача со свободными концами
 г) изопериметрическая задача

$$\int_0^1 \dot{x}^2 dt + 4x^2(0) - 5x^2(1) \rightarrow \text{extr}$$

21. Укажите вид уравнения Эйлера в задаче Больца о минимизации функционала

$$\int_0^1 L(t, x(t), \dot{x}(t)) dt + l(x(0), x(1))$$

- а) $\frac{d}{dt} L_x + L_{\dot{x}} = 0$
 б) $-\frac{d}{dt} L_x + L_{\dot{x}} = 0$
 в) $\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0$
 г) $-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = 0$

22. Укажите решение задачи Больца

$$\int_0^1 (x^2 + 2x) dt + x^2(0) \rightarrow \min$$

- а) $x = \cos t$
 б) $x = -t^2 + t$
 в) $x = \frac{t^2}{2} - t - 1$
 г) $x = t + 1$

23. Укажите решение задачи оптимального управления

$$\int_0^1 x dt \rightarrow \min, |x| \leq 2, x(0) = \dot{x}(1) = 0$$

- а) $x = \sin \frac{\pi t}{2}$
 б) $x = t^2 - 2t$
 в) $x = 0$
 г) $x = t^3 - 3t$

9. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины

9.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная литература

1. Минько Э. В. Оптимальное управление коммерческими проектами: учебное пособие / Э. В. Минько, А. Э. Минько. - Оптимальное управление коммерческими проектами - Саратов: Ай Пи Эр Медиа, 2017. - 976 с. - 978-5-4486-0326-6. - Текст: электронный // IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/74227.html> - Режим доступа: по подписке

2. Максимов В. П. Теория оптимального управления: вводный курс лекций: учебное пособие / В. П. Максимов. - Теория оптимального управления: вводный курс лекций - Пермь: Пермский государственный национальный исследовательский университет, 2018. - 84 с. - 978-5-7944-3068-4. - Текст: электронный // IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/117592.html> - Режим доступа: по подписке

3. Высшая математика для экономистов: учебник для студентов вузов, обучающихся по экономическим специальностям / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман; под редакцией Н. Ш. Кремера. - Высшая математика для экономистов - Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2023. - 480 с. - 978-5-238-00991-9. - Текст: электронный // IPR SMART: [сайт]. - URL: <https://www.iprbookshop.ru/141378.html> - Режим доступа: по подписке

Дополнительная литература

1. Алексеев В.М. Сборник задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи : Учеб. пособие / В.М. Алексеев, Э.М. Галеев, В.М. Тихомиров. - Наука . Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1984. - 288 с. - Текст: непосредственный.

9.2. Профессиональные базы данных и ресурсы «Интернет», к которым обеспечивается доступ обучающихся

Профессиональные базы данных

1. <https://www.garant.ru> - Информационно-правовой портал "Гарант"

Ресурсы «Интернет»

1. <https://www.iprbookshop.ru/> - Онлайн библиотека
2. <http://economics.ru/> - сайт Института «Экономическая школа»
3. <http://economics.ru/> - сайт Института «Экономическая школа»

9.3. Программное обеспечение и информационно-справочные системы, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Перечень программного обеспечения

(обновление производится по мере появления новых версий программы)

Не используется.

Перечень информационно-справочных систем

(обновление выполняется еженедельно)

Не используется.

9.4. Оборудование и технические средства обучения

Смешанный тип

Интерактивная панель - 1 шт.

Меловая доска - 4 шт.

Автоматизированное рабочее место (АРМ) - 2 шт.

Проектор - 2 шт.

10. Методические указания по освоению дисциплины (модуля)

Текущий контроль представляет собой проверку усвоения учебного материала теоретического и практического характера, регулярно осуществляемую на протяжении семестра.

К основным формам текущего контроля (текущей аттестации) относятся контрольная работа, собеседование, тестирование.

Промежуточная аттестация осуществляется в конце семестра, завершает изучение данной дисциплины и помогает оценить более крупные совокупности знаний и умений, в некоторых случаях – даже формирование определенных компетенций.

Форма проведения промежуточной аттестации: зачет с оценкой.

Оценивание знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности носит комплексный, системный характер и учитывает, как место дисциплины в структуре ОПОП, так и содержательные и смысловые внутренние связи. Связи формируемых компетенций с разделами дисциплины обеспечивают возможность реализации для текущего контроля, промежуточной аттестации по дисциплине и итогового контроля наиболее подходящих оценочных средств.

Описание возможностей изучения дисциплины лицами с ОВЗ и инвалидами

Инвалиды и лица с ограниченными возможностями здоровья могут допускаться на аттестационные испытания в сопровождении ассистентов-сопровождающих. Во время процедуры оценивания обучающиеся могут пользоваться рабочей программой дисциплины, а также с разрешения преподавателя справочной и нормативной литературой.