



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ
(МИИГАиК)

Факультет оптического приборостроения
Кафедра высшей математики



**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 5387FD2AF5B17FED816FDE9A1D4973B1
Владелец: Степанченко Алексей Леонидович
Действителен: с 21.07.2025 по 14.10.2026

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор
А. Л. Степанченко
15 мая 2026 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
«Б1.О.11.02 ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ»**

Уровень высшего образования: бакалавриат

Направление подготовки: 12.03.05 Лазерная техника и лазерные технологии

Направленность(профиль) подготовки: Лазерная техника и лазерные технологии

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Год набора (приема на обучение): 2026

Срок получения образования: 4 года

Объем:
в зачетных единицах: 3 з.е.
в академических часах: 108 ак.ч.

Москва, 2026

Разработчики:

Профессор кафедры Высшей математики, д.н., профессор
Нейман Ю. М.

Профессор кафедры Высшей математики, д.т.н., доцент
Сугаипова Л. С.

Рабочая программа дисциплины (модуля) составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки 12.03.05 Лазерная техника и лазерные технологии, утвержденного приказом Минобрнауки от 19.09.2017 № 951

Согласование и утверждение

№	Подразделение	Ответственное лицо	ФИО	Виза	Дата, протокол (при наличии)
1	факультет Оптического приборостроения	Председатель ученого совета факультета	Торшина И. П.	Рассмотрено	10.02.2026, № 5/25-26

Содержание

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля)
2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы
3. Место дисциплины в структуре ОП
4. Объем дисциплины и виды учебной работы
5. Содержание дисциплины
 - 5.1. Разделы, темы дисциплины и виды занятий
 - 5.2. Содержание разделов, тем дисциплины и формы текущего контроля
6. Оценочные материалы текущего контроля
7. Оценочные материалы промежуточной аттестации
8. Порядок проведения промежуточной аттестации
9. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины
 - 9.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы
 - 9.2. Профессиональные базы данных и ресурсы «Интернет», к которым обеспечивается доступ обучающихся
 - 9.3. Программное обеспечение и информационно-справочные системы, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине
 - 9.4. Оборудование и технические средства обучения
10. Методические указания по освоению дисциплины (модуля)

1. Цель и задачи освоения дисциплины (модуля)

Цель освоения дисциплины - получение обучающимися теоретических знаний о закономерностях развития современного математического аппарата и его связи с профессиональной деятельностью, об основных направлениях развития современной математики; формирование практических навыков и готовности к самостоятельной разработке и применению математического аппарата для решения практических задач профессиональной деятельности, построения математических моделей изучаемых процессов и явлений; овладение навыками применения стандартных математических моделей и методов в профессиональной деятельности.

Задачи изучения дисциплины:

- формирование понятийного аппарата и представлений о современных математических методах, применяемых при решении профессиональных задач;
- освоение навыков использования математического аппарата: пределы, производные, интегралы, ряды, дифференциальные уравнения;
- получение компетенций в области применения математического аппарата для решения практических задач профессиональной деятельности, а также построения математических моделей изучаемых процессов и явлений;
- формирование умений применять полученные знания в практической деятельности, решать практические задачи согласно выбранным математическому аппарату и моделям, описывающим решаемые профессиональные задачи.

2. Планируемые результаты обучения по дисциплине (модулю), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

Компетенции, индикаторы и результаты обучения

ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в инженерной деятельности, связанной с проектированием, конструированием и технологиями производства лазерной техники

ОПК-1.2 Способен применять знания естественных наук в инженерной практике

Знать:

ОПК-1.2/Зн4 Основные математические и естественные методы, позволяющие решать профессиональные задачи

Уметь:

ОПК-1.2/Ум4 Выявить перечень подходящих для решения конкретной задачи методов математической интерпретации процесса

Владеть:

ОПК-1.2/Нв4 Теоретическим аппаратом, иметь способность проводить аналитическую работу с источниками

ОПК-1.3 ОПК-1.3. Способен применять общетехнические знания в инженерной деятельности

Знать:

ОПК-1.3/Зн4 Закономерности развития современного математического аппарата в контексте профессиональной деятельности

ОПК-1.3/Зн19 Направления развития используемого в различных отраслях науки математического аппарата

Уметь:

ОПК-1.3/Ум4 Применять математический аппарат для решения практических задач профессиональной деятельности

ОПК-1.3/Ум20 Использовать открытые источники для поиска актуальных результатов исследований в рамках специальности

Владеть:

ОПК-1.3/Нв4 Навыками использования применяемого в отрасли математического аппарата

ОПК-1.3/Нв16 Навыками реализации передовых разработок в области использования математического аппарата для решения профессиональных задач

3. Место дисциплины в структуре ОП

Дисциплина (модуль) Б1.О.11.02 «Функции многих переменных» относится к обязательной части образовательной программы и изучается в семестре(ах): 3.

В процессе изучения дисциплины студент готовится к решению типов задач профессиональной деятельности, предусмотренных ФГОС ВО и образовательной программой.

4. Объем дисциплины (модуля) и виды учебной работы

Период обучения	Общая трудоемкость (часы)	Общая трудоемкость (ЗЕТ)	Лекционные занятия (часы)	Практические занятия (часы)	Самостоятельная работа (часы)	Промежуточная аттестация (часы)
3 семестр	108	3	34	34	4	Экзамен (36)
Всего	108	3	34	34	4	36

5. Содержание дисциплины (модуля)

5.1. Разделы, темы дисциплины и виды занятий

(часы промежуточной аттестации не указываются)

Наименование раздела, темы	Всего	Лекционные занятия	Практические занятия	Самостоятельная работа	Планируемые результаты обучения, соотношенные с результатами освоения программы
Раздел 6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных	25	12	12	1	ОПК-1.2 ОПК-1.3
Тема 6.1. Функции нескольких переменных	2	1	1		
Тема 6.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных	12	6	6		

Тема 6.3. Геометрические приложения частных производных	2,5	1	1	0,5	
Тема 6.4. Экстремум функции нескольких переменных	4	2	2		
Тема 6.5. Скалярное поле	4,5	2	2	0,5	
Раздел 7. Кратные интегралы	17,5	8	8	1,5	
Тема 7.1. Двойной интеграл	10,5	5	5	0,5	ОПК-1.2 ОПК-1.3
Тема 7.2. Тройной интеграл	2,5	1	1	0,5	
Тема 7.3. Приложения кратных интегралов	4,5	2	2	0,5	
Раздел 8. Элементы векторного анализа. Криволинейные и поверхностные интегралы	29,5	14	14	1,5	
Тема 8.1. Элементы теории поля	6,5	3	3	0,5	ОПК-1.2 ОПК-1.3
Тема 8.2. Криволинейные интегралы	12,5	6	6	0,5	
Тема 8.3. Поверхностные интегралы	10,5	5	5	0,5	
Итого	72	34	34	4	

5.2. Содержание разделов, тем дисциплин и формы текущего контроля

Раздел 6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Тема 6.1. Функции нескольких переменных

- 1.1. Основные понятия
- 1.2. Предел и непрерывность функции нескольких переменных

Тема 6.2. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных

- 2.1 Частные производные первого порядка
- 2.2 Дифференцируемость и полный дифференциал
- 2.3 Инвариантность формы дифференциала первого порядка
- 2.4 Линеаризация функции
- 2.5 Частные производные и дифференциалы высших порядков
- 2.6 Производная сложной функции
- 2.7 Дифференцирование неявно заданной функции

Тема 6.3. Геометрические приложения частных производных

- 3.1. Касательная плоскость и нормаль к поверхности
- 3.2. Геометрический смысл полного дифференциала
- 3.3. Нормальная плоскость и касательная к пространственной кривой

Тема 6.4. Экстремум функции нескольких переменных

- 4.1. Формула Тейлора
- 4.2. Локальный экстремум
- 4.3. Условный экстремум
- 4.4. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой ограниченной области

Тема 6.5. Скалярное поле

- 5.1. Линии и поверхности уровня
- 5.2. Производная по направлению
- 5.3. Градиент скалярного поля

Текущий контроль

Вид (форма) контроля
Контрольная работа

Раздел 7. Кратные интегралы

Тема 7.1. Двойной интеграл

- 1.1. Двойной интеграл, его геометрический смысл и свойства
- 1.2. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных декартовых координатах
- 1.3. Замена переменных в двойном интеграле
- 1.4. Вычисление двойного интеграла в полярных координатах

Тема 7.2. Тройной интеграл

- 2.1. Тройной интеграл, его свойства и вычисление в прямоугольных декартовых координатах
- 2.2. Переход к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле

Тема 7.3. Приложения кратных интегралов

- 3.1. Вычисление площади плоской области и площади поверхности
- 3.2. Вычисление объема тела
- 3.3. Механические приложения кратных интегралов

Текущий контроль

Вид (форма) контроля
Контрольная работа

Раздел 8. Элементы векторного анализа. Криволинейные и поверхностные интегралы

Тема 8.1. Элементы теории поля

Элементы теории поля

Тема 8.2. Криволинейные интегралы

- 2.1. Криволинейные интегралы первого рода, их свойства и способы вычисления
- 2.2. Криволинейные интегралы второго рода, их свойства и способы вычисления. Условие независимости от пути интегрирования
- 2.3. Формула Грина
- 2.4. Приложения криволинейных интегралов

3.1. Понятия поверхностных интегралов первого и второго рода

3.2. Формула Гаусса-Остроградского. Теорема Стокса

Текущий контроль

Вид (форма) контроля
Контрольная работа

6. Порядок проведения промежуточной аттестации

Порядок проведения промежуточной аттестации регламентируется локальными нормативными актами Университета:

- Положением о формах, периодичности, порядке текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по основным образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный университет геодезии и картографии», п.6 «Организация и проведение промежуточной аттестации».
- Положением о порядке осуществления образовательного процесса, проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный университет геодезии и картографии», п.8 «Проведение промежуточной аттестации с применением ЭО и ДОТ».

Промежуточная аттестация: Экзамен, 3 семестр.

7. Оценочные материалы текущего контроля

Раздел 6. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

Контролируемые ИДК: ОПК-1.2 ОПК-1.3

Тема 6.5. Скалярное поле

Форма контроля/оценочное средство: Контрольная работа

Вопросы/Задания:

1. Постройте линии уровня функции

$$z = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2),$$

придавая z значения от -1 до $\frac{3}{2}$ через $\frac{1}{2}$.

2. Найдите угол между градиентами функции

$$z = \arcsin\left(\frac{x}{x+y}\right)$$

в точках $M_1 = (1, 1)$ и $M_2 = (3, 4)$, а также производную функции z в точке M_1 по направлению к точке M_2 .

3. Вычислите значения производных функции

$$z = x^y, \text{ где } x = \sin u, y = \cos v, u_0 = \frac{\pi}{2}, v_0 = 0, \text{ с точностью до двух}$$

знаков после запятой.

4. Исследуйте на экстремум функцию

$$z = (2x - x^2)(2y - y^2)$$

Раздел 7. Кратные интегралы

Контролируемые ИДК: ОПК-1.2 ОПК-1.3

Тема 7.3. Приложения кратных интегралов

Форма контроля/оценочное средство: Контрольная работа

Вопросы/Задания:

1. Измените порядок интегрирования, изобразите область интегрирования

$$\int_{-6}^{-3} dy \int_0^{\sqrt{36-y^2}} f(x, y) dx + \int_{-3}^0 dy \int_0^{\sqrt{-12y-y^2}} f(x, y) dx$$

2. Вычислите

$$\iint_D (2x - y) dx dy, \text{ где область } D \text{ ограничена линиями } y = x^2, y = x, \\ x = 1, x = 2.$$

3. Вычислите объем тела, ограниченного поверхностями

$$y = 2x, x + y + z = 2, x \geq 0, z \geq 0.$$

4. Вычислите массу тела, ограниченного поверхностями

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2, x = 0, y = 0, (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0), \\ \text{где } \mu = 32z \text{ — плотность тела.}$$

Раздел 8. Элементы векторного анализа. Криволинейные и поверхностные интегралы

Контролируемые ИДК: ОПК-1.2 ОПК-1.3

Тема 8.3. Поверхностные интегралы

Форма контроля/оценочное средство: Контрольная работа

Вопросы/Задания:

1. Вычислите поверхностный интеграл

$$\iint_S x dz, \text{ где } S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 2\}.$$

2. Найдите циркуляцию векторного поля

$$\vec{a} = 4y\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k} \text{ вдоль замкнутого контура, заданного параметрическими уравнениями } x = \cos t, y = \sin t, z = 2 - \sin t - \cos t \\ (0 \leq t \leq 2\pi).$$

3. Используя формулу Остроградского-Гаусса, найдите поток векторного поля

$$\vec{a} = (xy + y^2 + z)\vec{i} + (x^2z + yz)\vec{j} + (x^2 + xz)\vec{k} \text{ через замкнутую поверхность, образованную поверхностями } x^2 + y^2 = 4, z = 0 \text{ и } z = 1 \\ (\text{нормаль внешняя}).$$

4. Используя формулу Стокса, найдите модуль циркуляции векторного поля

$$\vec{a} = x\vec{i} - z^2\vec{j} + y\vec{k} \text{ вдоль замкнутого контура, заданного уравнениями } x^2 + y^2 = 4, 4x - 3y - z = 3.$$

8. Оценочные материалы промежуточной аттестации

3 семестр, Экзамен

Контролируемые ИДК: ОПК-1.2 ОПК-1.3

Вопросы/Задания:

1. Производная по направлению. Градиент.
Сформулировать определение. Перечислить свойства.
2. Поток поля. Дивергенция поля. Циркуляция поля. Ротор поля.
Сформулировать определение. Перечислить свойства.
3. Определение поверхностного интеграла первого рода
Сформулировать определение. Привести свойства.

9. Материально-техническое и учебно-методическое обеспечение дисциплины

9.1. Перечень основной и дополнительной учебной литературы

Основная литература

1. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 2: Учеб. пособие для вузов. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 6-е изд. - Издательский дом "ОНИКС "21 век", 2003. - 416 - 5-329-00327-X. - Текст: непосредственный.
2. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2-х ч. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. - 6-е изд. - Издательский дом "ОНИКС "21 век", 2006. - 304 - 5-488-00714-8. - Текст: непосредственный.
3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс / Д.Т. Письменный. - 3-е изд. - Издательство Айрис-пресс, 2005. - 608 - 5-8112-1093-0. - Текст: непосредственный.

Дополнительная литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов В 2-х т. Т. 2. / Н.С. Пискунов. - изд. стереот. - Издательство Интеграл-Пресс, 2001; 2002. - 5-89602-013-9 (т.2). - Текст: непосредственный.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учеб. для втузов. В 2-х т. Т.1. / Н.С. Пискунов. - изд. стереот. - Издательство Интеграл-Пресс, 2001. - 416 - 5-89602-012-0 (т.1). - Текст: непосредственный.

9.2. Профессиональные базы данных и ресурсы «Интернет», к которым обеспечивается доступ обучающихся

Профессиональные базы данных

Не используются.

Ресурсы «Интернет»

1. <https://www.iprbookshop.ru/> - Онлайн библиотека

9.3. Программное обеспечение и информационно-справочные системы, используемые при осуществлении образовательного процесса по дисциплине

Перечень программного обеспечения

(обновление производится по мере появления новых версий программы)

Не используется.

Не используется.

9.4. Оборудование и технические средства обучения

Смешанный тип

Интерактивная панель - 1 шт.

Меловая доска - 4 шт.

Автоматизированное рабочее место (АРМ) - 2 шт.

Проектор - 2 шт.

10. Методические указания по освоению дисциплины (модуля)

Освоение обучающимся учебной дисциплины «Функции многих переменных» предполагает изучение материалов дисциплины на аудиторных занятиях и в ходе самостоятельной работы. Аудиторные занятия проходят в форме лекций и практических занятий. Самостоятельная работа включает разнообразный комплекс видов и форм работы обучающихся.

Самостоятельная работа студентов (СРС) позволяет предметно выработать аналитические навыки, обеспечить понимание теории и практики, более осознанно относиться к уровню своей профессиональной подготовки. СРС способствует развитию их мыслительной деятельности, обеспечивает усвоение определенного учебного материала и предоставляет необходимую подготовку для решения конкретных практических задач, входящих в их будущие профессиональные обязанности. СРС направлена на обеспечение индивидуализации при изучении курса, на развитие способностей и возможностей, на персонификацию контроля за качеством обучения.

При подготовке к практическим занятиям, руководствуясь планом и списком рекомендуемой литературы, необходимо изучить тему так, чтобы по каждому из предложенных вопросов студент мог дать развернутый, обстоятельный ответ.

Внеаудиторная самостоятельная работа студентов включает:

- Работа над конспектом лекции
- Подготовка к практическому занятию
- Доработка конспекта лекции с применением учебника, методической литературы, дополнительной литературы
- Подбор, изучение, анализ и конспектирование рекомендованной литературы
- Самостоятельное изучение отдельных тем, параграфов
- Подготовка к экзамену

Для успешного освоения учебной дисциплины и достижения поставленных целей необходимо внимательно ознакомиться с настоящей рабочей программой учебной дисциплины. Ее может представить преподаватель на вводной лекции или обучающийся самостоятельно использует информацию на официальном Интернет-сайте Университета.

Следует обратить внимание на список основной и дополнительной литературы, которая имеется в электронной библиотечной системе IPRBooks, на предлагаемые преподавателем ресурсы информационно-телекоммуникационной сети Интернет. Эта информация необходима для самостоятельной работы обучающегося.

Описание возможностей изучения дисциплины лицами с ОВЗ и инвалидами

При необходимости обучения студентов-инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья аудиторные занятия могут быть заменены или дополнены изучением полнотекстовых лекций, презентаций, видео- и аудиоматериалов в электронной информационно-образовательной среде (ЭИОС) университета. Индивидуальные задания подбираются в адаптированных к ограничениям здоровья формах (письменно или устно, в форме презентаций). Выбор методов обучения зависит от их доступности для инвалидов и

лиц с ограниченными возможностями здоровья.

Рабочая программа дисциплины для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья разрабатывается индивидуально с учетом особенностей психофизического развития, индивидуальных возможностей и состояния здоровья таких обучающихся.