



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ
(МИИГАиК)

Факультет оптического приборостроения
Кафедра высшей математики



**ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН
ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ**

Сертификат: 5387FD2AF5B17FED816FDE9A1D4973B1
Владелец: Степанченко Алексей Леонидович
Действителен: с 21.07.2025 по 14.10.2026

«УТВЕРЖДАЮ»

Проректор
А. Л. Степанченко
15 мая 2026 г.

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)
ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
«Б1.О.11.01 ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»**

Уровень высшего образования: бакалавриат

Направление подготовки: 12.03.05 Лазерная техника и лазерные технологии

Направленность(профиль) подготовки: Лазерная техника и лазерные технологии

Квалификация (степень) выпускника: бакалавр

Форма обучения: очная

Год набора (приема на обучение): 2026

Срок получения образования: 4 года

Объем:
в зачетных единицах: 3 з.е.
в академических часах: 108 ак.ч.

Москва, 2026

Разработчики:

Профессор кафедры Высшей математики, д.н., профессор
Нейман Ю. М.

Профессор кафедры Высшей математики, д.т.н., доцент
Сугаипова Л. С.

Фонд оценочных средств по дисциплине (модулю) составлен в соответствии с требованиями
ФГОС ВО по направлению подготовки 12.03.05 Лазерная техника и лазерные технологии,
утвержденного приказом Минобрнауки от 19.09.2017 № 951

Согласование и утверждение

№	Подразделение	Ответственное лицо	ФИО	Виза	Дата, протокол (при наличии)
1	факультет Оптического приборостроения	Председатель ученого совета факультета	Торшина И. П.	Рассмотрено	10.02.2026, № 5/25-26

1. Планируемые результаты обучения, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы

ОПК-1 Способен применять естественнонаучные и общетехнические знания, методы математического анализа и моделирования в инженерной деятельности, связанной с проектированием, конструированием и технологиями производства лазерной техники

ОПК-1.2 Способен применять знания естественных наук в инженерной практике

Знать:

ОПК-1.2/Зн4 Основные математические и естественные методы, позволяющие решать профессиональные задачи

Уметь:

ОПК-1.2/Ум4 Выявить перечень подходящих для решения конкретной задачи методов математической интерпретации процесса

Владеть:

ОПК-1.2/Нв4 Теоретическим аппаратом, иметь способность проводить аналитическую работу с источниками

ОПК-1.3 ОПК-1.3. Способен применять общетехнические знания в инженерной деятельности

Знать:

ОПК-1.3/Зн4 Закономерности развития современного математического аппарата в контексте профессиональной деятельности

ОПК-1.3/Зн19 Направления развития используемого в различных отраслях науки математического аппарата

Уметь:

ОПК-1.3/Ум4 Применять математический аппарат для решения практических задач профессиональной деятельности

ОПК-1.3/Ум20 Использовать открытые источники для поиска актуальных результатов исследований в рамках специальности

Владеть:

ОПК-1.3/Нв4 Навыками использования применяемого в отрасли математического аппарата

ОПК-1.3/Нв16 Навыками реализации передовых разработок в области использования математического аппарата для решения профессиональных задач

2. Показатели и критерии оценивания компетенций

Планируемые результаты освоения программы	Уровень овладения	Критерии оценивания (перечень сформированных ИДК/ЗУВ по уровням освоения)

3. Шкала оценивания

Оценка	Критерии оценивания (перечень сформированных ИДК/ЗУВ)
Неудовлетворительно	Результаты обучения не сформированы на достаточном уровне

4. Контрольные мероприятия по дисциплине

Вид контроля	Форма контроля/Оценочное средство
Текущий контроль	Контрольная работа
Промежуточная аттестация	Контрольная работа Экзамен

№ п/п	Наименование раздела	Контролируемые ИДК	Вид контроля/ используемые оценочные материалы	
			Текущий	Промежут. аттестация
4	Векторная алгебра и аналитическая геометрия	ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа	Экзамен
5	Элементы линейной алгебры	ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа	Экзамен

5. Порядок проведения промежуточной аттестации

Порядок проведения промежуточной аттестации регламентируется локальными нормативными актами Университета:

- Положением о формах, периодичности, порядке текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся по основным образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный университет геодезии и картографии», п.6 «Организация и проведение промежуточной аттестации».
- Положением о порядке осуществления образовательного процесса, проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации обучающихся с применением электронного обучения и дистанционных образовательных технологий в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный университет геодезии и картографии», п.8 «Проведение промежуточной аттестации с применением ЭО и ДОТ».

Промежуточная аттестация: Экзамен, 2 семестр.

6. Оценочные материалы текущего контроля

Раздел 4. Векторная алгебра и аналитическая геометрия

Контролируемые ИДК: ОПК-1.2 ОПК-1.3

Тема 4.7. Прямая в пространстве

Форма контроля/оценочное средство: Контрольная работа

Вопросы/Задания:

1. Вычислите скалярное произведение

$$\left(\frac{1}{3}\bar{b} - 2\bar{a}\right) \cdot (2\bar{b} + 3\bar{a}), \text{ пр}_{\bar{b}}(\bar{a} + 3\bar{b}) \text{ и } \cos\left(\frac{\square}{\bar{a}}, 2\bar{b}\right),$$

$$\text{если } \bar{a} = -5\bar{m} - 6\bar{n}, \bar{b} = 2\bar{m} + 7\bar{n}, |\bar{m}| = 2, |\bar{n}| = 7, (\bar{m}, \bar{n}) = \pi.$$

2. Вычислите модуль векторного произведения

$$[3\bar{a} - \bar{b}, 2\bar{c} + \bar{a}],$$

$$\text{если } \bar{a} = 2\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}, \bar{b} = -\bar{j} - \bar{k}, \bar{c} = 5\bar{i} - 2\bar{k}.$$

3. Вычислите смешанное произведение

$$\left(\bar{a}, \bar{b} - 2\bar{c}, \bar{a} - \bar{c} \right),$$

если $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} - 2\bar{j} - 2\bar{k}$

4. Выполните пункты а)--к)

Пусть $A = (3, -1, 5)$, $B = (2, -1, 4)$, $C = (4, 0, 5)$, $D = (1, 0, 4)$.

- Напишите уравнение плоскости (ABC) .
- Напишите канонические уравнения прямой l , проходящей через точку D перпендикулярно плоскости (ABC) .
- Напишите канонические уравнения прямой m , проходящей через точку D параллельно прямой (AB) .
- Вычислите расстояние от точки D до плоскости (ABC) .
- Вычислите расстояние от точки D до прямой (AB) .
- Вычислите расстояние между прямыми l и (AB) .
- Напишите уравнение плоскости π , проходящей через точку D параллельно плоскости (ABC) .
- Напишите уравнение плоскости α , проходящей через точку D перпендикулярно плоскости (ABC) .
- Напишите параметрические и канонические уравнения прямой пересечения плоскостей π и (ABD) .
- Найдите угол между плоскостями π и (ABD) .
- Найдите угол между прямыми l и (CD) .
- Найдите угол между прямой (AB) и плоскостью (CBD) .

5. Выполните пункты а)--и)

Пусть $A = (3, 4, -1)$, $B = (2, -4, 2)$, $C = (5, 6, 0)$, $D = (11, -3, -12)$.

- Найдите координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, их модули и направляющие косинусы.
- Найдите координаты векторов $\overline{AB} - 2\overline{BC} + 4\overline{DA}$ и $7\overline{AB} - \overline{AC} + 3\overline{DA}$.
- Найдите угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.
- Найдите проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$.
- Найдите координаты точки M , делящей отрезок AB в отношении 2:1.
- Докажите неколлинеарность векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и вычислите площадь треугольника ABC .
- Вычислите длину высоты треугольника ABC , опущенной из вершины A .
- Докажите некомпланарность векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ и вычислите объем пирамиды $ABCD$.
- Вычислите площадь сечения, проходящего через ребро BC и вершины A и D пирамиды $ABCD$.
- Вычислите длину высоты пирамиды $ABCD$, опущенной из вершины D .

Раздел 5. Элементы линейной алгебры

Контролируемые ИДК: ОПК-1.2 ОПК-1.3

Тема 5.5. Линейные пространства

Форма контроля/оценочное средство: Контрольная работа

Вопросы/Задания:

1. Найдите базис и размерность следующих пространств

$$\begin{aligned} \text{а)} V &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n | x_1 = 0\}; \\ \text{б)} V &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n | x_1 = x_n = 0\}; \\ \text{в)} V &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n | x_1 = x_2 = \dots = x_n\}. \end{aligned}$$

2. Выпишите все векторы, входящие в линейную оболочку данной системы векторов:

$$\begin{aligned} \text{а)} & (1, 0, 0, 0); \\ \text{б)} & (1, 0, 0, 1); (0, 0, 0, 1); \\ \text{в)} & (1, 0, 0, 0); (0, 0, 0, 1); (0, 1, 1, 0). \end{aligned}$$

3. Найдите

Найдите матрицы перехода от базиса $e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ к базисам $e' = (\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3)$ и $e'' = (\bar{e}''_1, \bar{e}''_2, \bar{e}''_3)$, а также координаты вектора $\bar{x} = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$ в базисах e' и e'' , если $\bar{e}'_1 = 3\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3$, $\bar{e}'_2 = -4\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3$, $\bar{e}'_3 = 5\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3$ и $\bar{e}''_1 = 2\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - \bar{e}_3$, $\bar{e}''_2 = 2\bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$, $\bar{e}''_3 = -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$.

4. Найдите собственные значения и собственные векторы

оператор $f: V^3 \rightarrow V^3$,

$$\text{задан в базисе } e = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3) \text{ матрицей } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Тема 5.6. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Форма контроля/оценочное средство: Контрольная работа

Вопросы/Задания:

1. Вычислите произведение матриц А и В, если

$$\text{а)} A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б)} A = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, B = (1 \ 2 \ 3); \quad \text{в)} A = (1 \ 2 \ 3),$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \text{г)} A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{д)} A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{е)} A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 5 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{ё)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 6 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ -4 & -2 & -6 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 6 & 3 & 9 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{ж)} A = \begin{pmatrix} \chi_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \chi_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \chi_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix}; \quad \text{и) } A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix}.$$

2. Вычислите значение многочлена от матрицы, если

$$\text{а) } f(x) = x^2 + x + 2, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } f(x) = x^2 + 3x - 1, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 5 & 4 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Являются ли линейным векторным пространством следующие множества?

$$\text{а) } V = \{f(x) \mid f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, \quad a_0, a_1, a_2 \in R\};$$

$$\text{б) } V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in R \right\};$$

$$\text{в) } V = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \mid \alpha_{ij} \in R, \quad i, j = \overline{1, n} \right\}.$$

4. Найдите координаты центра и радиус окружности

$$x^2 + y^2 - 10x + 4y + 20 = 0.$$

5. Матричным методом решите системы

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

6. Решите системы методом Гаусса

$$\text{а) } \begin{cases} 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 21, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 3x_1 + 5x_2 + 1x_3 + x_4 = 15, \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 18; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 = 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8, \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4; \end{cases}$$

7. Методом Крамера решите системы

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 3, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = 2; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

7. Оценочные материалы промежуточной аттестации

2 семестр, Экзамен

Контролируемые ИДК: ОПК-1.2 ОПК-1.3

Вопросы/Задания:

4. Определитель

Понятие определителя. Свойства определителя.

5. Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов в трехмерном пространстве.

Привести определения. Перечислить свойства. Сделать чертеж.

6. С помощью определения выясните, являются ли данные системы линейно зависимыми?

а) $\vec{a}_1 = (1, 1, 1)$; $\vec{a}_2 = (1, 1, 2)$; $\vec{a}_3 = (1, 2, 3)$;

б) $\vec{a}_1 = (4, 0, 1, -5)$; $\vec{a}_2 = (0, 4, -5, -1)$; $\vec{a}_3 = (-1, 5, 4, 0)$; $\vec{a}_4 = (5, 1, 0, 4)$;

в) $f_1(x) = 4 - x$; $f_2(x) = 2x + 3$; $f_3(x) = 6x + 8$;

г) $f_1(x) = \sin^2 x$; $f_2(x) = \cos^2 x$; $f_3(x) = \frac{1}{2}$.