

На правах рукописи

ЧИНЬ ТХАНЬ ЧЫОНГ


**РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ УЧЕТА КРИВИЗНЫ ЗЕМЛИ ПРИ
ВЫСОКОТОЧНЫХ ИНЖЕНЕРНО-ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ
РАБОТАХ**

Специальность: 25.00.32 – Геодезия

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата технических наук



Москва 2012

Работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования «Московский государственный университет геодезии и картографии» (МИИГАиК)

Научный руководитель: доктор технических наук, профессор
кафедры прикладной геодезии МИИГАиК
Клюшин Евгений Борисович

Официальные оппоненты: доктор технических наук, профессор
кафедры геодезии, геоинформатики и навигации
Московского государственного университета
путей сообщения (МИИТ)
Матвеев Станислав Ильич

кандидат технических наук, профессор
кафедры геодезии МИИГАиК
Шлапак Василий Викторович

Ведущая организация: Государственный университет по землеустройству (ГУЗ)

Защита диссертации состоится «17» мая 2012 г. в 10 час. на заседании диссертационного совета Д 212.143.03 при Московском государственном университете геодезии и картографии по адресу: 105064, Москва, К-64, Гороховский пер., 4, МИИГАиК, зал заседаний Ученого совета.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке МИИГАиК.

Автореферат разослан «12» апреля 2012 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета



Климков Ю.М.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Последние десятилетия характерны увеличением интенсивности строительства, и особенно это проявляется в увеличении размеров и габаритов строящихся объектов. Существенно возросла высота строящихся зданий, увеличились размеры и высоты гидротехнических плотин для обеспечения промышленности возобновляемыми источниками электроэнергии. Несмотря на все сложности, сопровождающие атомную энергетику, строительство атомных электростанций продолжается. В развивающихся странах увеличилась интенсивность дорожного строительства, а это связано с увеличением строительства мостов. При этом длина мостов непрерывно возрастает. Совсем недавно закончилось строительство вантового моста в Китае длиной свыше 800 м, а в России заканчивается строительство вантового моста длиной свыше 1000 м во Владивостоке на остров Русский через морской пролив Босфор Восточный.

Увеличение размеров и габаритов строящихся объектов сопровождается существенным увеличением точности геодезических работ. Для обеспечения возрастающих точностных требований к геодезическим работам промышленность разработала и изготовила новое поколение высокоточных геодезических приборов и, в первую очередь, электронных тахеометров (средняя квадратическая ошибка измерения углов не хуже 2", а расстояний – 2 мм + 1 мм/км), также возросла точность спутниковых методов определения приращений координат, которая также достигла средней квадратической ошибки определения приращений координат, равной 2 мм + 1 мм/км.

Таким образом, с одной стороны, возросли точностные требования производства строительных работ, а, с другой стороны, существенно расширились точности геодезических средств измерений. Эти обстоятельства заставляют по-новому взглянуть на эффективность использования высокоточных средств измерений в инженерной геодезии. В первую очередь это относится к методам учета кривизны Земли при высокоточных измерениях, которые были разработаны при создании государственной геодезической сети методом триангуляции для измерений при значительных расстояниях, но в инженерно-геодезических

работах практически не использовались, так как производство не требовало столь высокой точности. Не обсуждается эта проблема и при обработке результатов измерений современными спутниковыми методами при создании опорных инженерно-геодезических сетей значительной протяженности в местных системах координат. При этом местная система координат не позволяет определить положение объекта по геодезической широте, а следовательно, учесть кривизну Земли на данной широте достаточно сложно, так как требуется дополнительная информация.

Данная диссертация посвящена исследованиям влияния кривизны Земли на высокоточные линейные и спутниковые результаты измерений и разработке методики учета влияния кривизны Земли при высокоточных геодезических измерениях современными средствами измерений.

Цель работы. Исследование и разработка методики учета кривизны Земли при высокоточных инженерно-геодезических работах.

Научная новизна работы.

1. Доказано, что в плановых сетях учитывать кривизну Земли целесообразно при расстояниях свыше 5 км, а при высотных измерениях – при расстояниях свыше 150 м.

2. Научно обосновано, что при использовании результатов спутниковых измерений в инженерно-геодезических сетях необходимо плановую и высотные составляющие решать отдельно.

3. Разработан алгоритм вычисления превышения с учетом влияния кривизны Земли.

4. Математически обосновано, что угол наклона линии, соединяющей два пункта, не является однозначной величиной, так как углы наклона линии, определенные на двух крайних пунктах линии, различны, а из-за этого горизонтальные проложения в направлении «прямо» и «обратно» различны. При измерении наклонного расстояния в одном направлении необходимо вводить поправку за кривизну Земли.

5. Анализ точности показал, что при использовании результатов спутниковых измерений в инженерно-геодезических работах необходимо учитывать кривизну Земли при расстояниях более 300-400 м.

6. Обосновано использование методики учета кривизны Земли в местной системе координат.

Практическая значимость. Разработки автора позволяют повысить точность результатов геодезических измерений за счет учета кривизны Земли, включая и результаты спутниковых измерений.

Апробация работы. Работа обсуждалась на научных семинарах кафедры прикладной геодезии, ее результаты были обсуждены на научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых МИИГАиК в 2011 г.

Публикации. По теме диссертации имеются 3 научные публикации, из них 2 в журнале рекомендованном ВАК РФ.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, четырех разделов с подразделами, заключения и списка литературы. Общий объем работы – 121 стр. Диссертация содержит 1 таблицу и 46 рисунков. Список литературы составляет 82 наименования.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность исследований, сформулирована цель работы и основные направления исследований.

В первой главе выполнен детальный обзор наиболее сложных объектов современного строительства. В качестве примеров приведены наиболее выдающиеся высотные здания, вантовые мосты большой протяженности, различные типы плотин, а также атомные электростанции. Приведенный обзор наиболее крупных и ответственных объектов убедительно показывает тенденцию развития создания новых сооружений, которые становятся все выше и протяженнее, а при строительстве предъявляются все более жесткие точностные требования к геодезическому обеспечению. Практически для всех крупных объектов требуется повышенная точность измерений (единицы миллиметров) при расстояниях, превышающих километр. Существенным препятствием успешно-

го внедрения высокоточных средств измерений является отсутствие методики учета кривизны Земли в инженерно-геодезических работах. В связи с этим возникает научная задача – разработка методики учета кривизны Земли в инженерно-геодезических работах при использовании высокоточных средств измерений, включая спутниковые технологии в прикладной геодезии.

Во второй главе рассмотрены вопросы учета кривизны земли при тригонометрическом нивелировании. Выполнен анализ формул, полученных Ф.Н. Красовским:

– при односторонних наблюдениях:

$$\Delta H = H_1 - H = s \operatorname{ctg} z + s^2 \frac{1-k}{2R} - (a_1 - i);$$

– при двусторонних наблюдениях:

$$\Delta H = H_1 - H = s \operatorname{tg} \frac{z_1 - z}{2} - \frac{a_1 + i_1}{2} + \frac{a + i}{2}.$$

Недостатком данных формул является то, что в них использовались упрощения без анализа возможной потери точности, а также то, что при тригонометрическом нивелировании определяется горизонтальное проложение, а в расчетных формулах его заменяют длиной дуги s .

В связи с этим сделан вывод формул тригонометрического нивелирования, свободного от перечисленных недостатков.

Для учета влияния кривизны Земли в тригонометрическом нивелировании рассмотрим треугольник OAB (рис. 1), откуда имеем

$$\frac{S}{\sin \varphi} = \frac{R}{\cos v_2} = \frac{R+h}{\cos v_1}, \quad (1)$$

где S – наклонное расстояние; v_1 и v_2 – углы наклона, измеренные на обоих концах линии AB ($v = 90^\circ - Z$); h – искомое превышение; R – радиус Земли.

Из равенств (1) нетрудно получить $h = \frac{S}{\sin \varphi} (\cos v_1 - \cos v_2)$.

Учитывая, что $\varphi = -(v_1 - v_2)$, окончательно получим

$$h = S \frac{\sin \frac{v_1 - v_2}{2}}{\cos \frac{v_1 + v_2}{2}}. \quad (2)$$

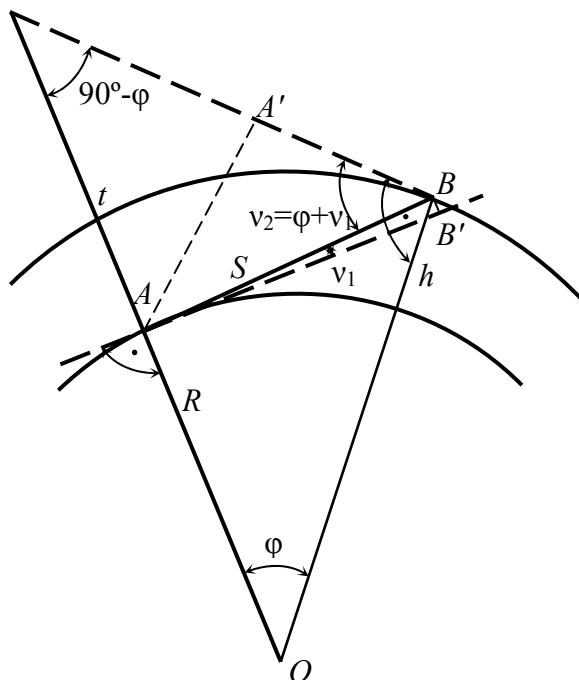


Рисунок 1. Разность горизонтальных проложений «прямо» и «обратно»

При вычислении превышений по результатам двухсторонних наблюдений по формуле (2) в разности входят уклонения отвесных линий в пунктах A и B , учитывается кривизна Земли, не требуется знание радиуса кривизны Земли, а также уменьшается влияние вертикальной рефракции.

Углы рефракции r_1 и r_2 входят в измеряемые углы v_1 и v_2 , как правило, с одним знаком: $v_1 = v_{01} + r_1$; $v_2 = v_{02} + r_2$, где r_1 и r_2 – углы рефракции на противоположных концах линии AB , v_{01} и v_{02} – углы наклона линии AB , свободные от рефракционных искажений (рис. 2). Один из измеряемых углов наклона положительный, а второй – отрицательный, следовательно: $\frac{v_1 - v_2}{2} = \frac{v_{01} - v_{02}}{2} + \frac{r_1 - r_2}{2}$.

Несмотря на очевидные преимущества формулы (2), ее не следует применять на большие расстояния (не более 1 км), если требуется повышенная точ-

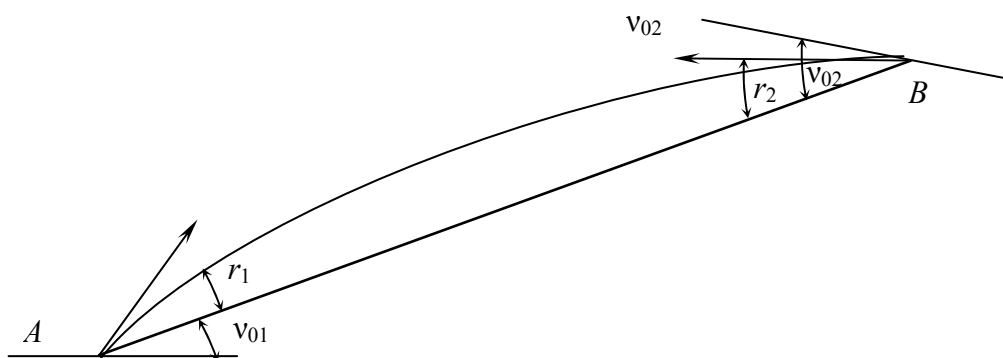


Рисунок 2

ность определяемых превышений, так как кривизна Земли учитывается весьма приближенно. При учете кривизны Земли не оговаривается, что следует понимать под кривизной Земли. Если рассматривать кривизну референц-эллипсоида, тогда результаты вычислений позволят найти разность геодезических высот. Если требуется вычислять разность нормальных высот, то под понятием кривизна Земли следует понимать кривизну квазигеоида, которая в должной мере не изучена в настоящее время.

С учетом высоты приборов над соответствующими реперами P_1 и P_2 превышение можно вычислить по формулам:

$$h = S \frac{\sin \frac{v_1 - v_2}{2}}{\cos \frac{v_1 + v_2}{2}} + \frac{l_1 - l_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2}, \quad h = S \frac{\sin \frac{Z_2 - Z_1}{2}}{\cos \frac{Z_2 + Z_1}{2}} + \frac{l_1 - l_2}{2} + \frac{V_2 - V_1}{2},$$

где V – высота инструмента; l_1 и l_2 – высоты одноименных визирных целей; Z_1 и Z_2 – зенитные расстояния.

Далее рассмотрены проекция Гаусса–Крюгера и связь криволинейной системы координат с системой координат в проекции Гаусса–Крюгера. Приведены рабочие формулы вычисления координат пунктов в проекции Гаусса–Крюгера. При этом особое внимание обращено на то, как учитывается при этом кривизна Земли. Это даст основание для объяснения методов учета кривизны Земли в местных инженерно-геодезических сетях при реализации как линейно-угловых, так и спутниковых измерений.

Рассмотрена также проекция UTM (Гаусса–Боага) и связь координат проекции Гаусса–Крюгера с координатами UTM, так как для топографических карт Вьетнама в настоящее время в шестиградусных зонах применяется проекция UTM – универсальная поперечно-цилиндрическая проекция Меркатора, называемая также проекцией Гаусса–Боага. Данная проекция отличается от проекции Гаусса–Крюгера тем, что в ней на среднем меридиане частный масштаб длин m_0 равен не единице, а 0,9996. При установке связи формул этих проекций учтено, что в России применяется левая плоская прямоугольная система координат, в которой ось x направлена на север, ось y – на восток, а во Вьетнаме

применяется правая плоская система координат, в которой ось x идет на восток, ось y – на север.

Из приведенного обзора следует, что кривизна Земли в полной мере учитывается при вычислении координат в проекции Гаусса–Крюгера.

В третьей главе рассмотрены вопросы учета влияния кривизны Земли при инженерно-геодезических работах.

При любых методах измерений на реальной поверхности Земли неизбежны потери точности, сопровождающие обработку результатов измерений. Разумным критерием точности может служить средняя квадратическая ошибка центрирования геодезического прибора, которая равна 0,5–0,7 мм. Следовательно, алгоритмы обработки результатов измерений не должны вносить дополнительных ошибок более 0,5 мм.

Вычислим максимальное расстояние, на котором кривизна Земли вносит ошибку в длину линии, равную 0,5 мм. При вычислении этого расстояния пренебрежем эллиптичностью Земли, примем ее как шар с радиусом 6371 км. Горизонтальное проложение S равно: $S_1 = R \operatorname{tg} \varphi$, а длина дуги D_1 равна

$$D_1 = R\varphi. \quad (3)$$

Следовательно, $S_1 = R \operatorname{tg} \frac{D_1}{R}$. Полагая, что угол φ – величина малая, при разложении в степенной ряд получим $S_1 = R \frac{D_1}{R} + \frac{D_1^3}{3R^3}$, следовательно, искомая разность δ равна $S_1 - D_1 = \delta_1 = \frac{D_1^3}{3R^2}$.

Максимальное расстояние, на котором кривизна Земли приведет к ошибке равной, равной δ_1 , равно $D_1 = \sqrt[3]{3R^2\delta_1}$.

Если поставить условие, чтобы кривизна Земли вносила ошибку не более 0,5 мм = $5 \cdot 10^{-7}$ км, максимальное расстояние не должно превышать

$$D_1 = \sqrt[3]{3 \cdot 6371^2 \cdot 5 \cdot 10^{-7}} \approx 4 \text{ км.}$$

Следовательно, для сохранения высокой точности тахеометрических измерений при расстояниях между пунктами свыше 4 км необходимо учитывать

кривизну Земли даже в локальных системах координат.

В зависимости от метода измерений и обработки результатов измерений возможно иное влияние кривизны Земли. Длина хорды S_2 может быть вычислена по результатам **спутниковых** измерений. Длина дуги D_2 определяется равенством (3), а длина хорды S_2 равна:

$$S_2 = 2R \sin \frac{\varphi}{2} = 2R \sin \frac{D_2}{2R}. \quad (4)$$

При сравнительно небольших расстояниях относительно радиуса Земли равенство (4) можно представить в виде: $S_2 - D_2 = \delta_2 = -\frac{D_2^3}{24R^2}$.

В таком случае максимальное расстояние, при котором кривизна Земли не превысит величины δ_2 , равно $D_2 = -2\sqrt[3]{3R^2\delta_2}$, и ошибка, вызванная кривизной Земли, равная 0,5 мм, проявится при расстояниях свыше 7,8 км. Из приведенного анализа видно, что в этом случае необходимо учитывать кривизну Земли даже в локальных системах координат при расстояниях свыше 8 км.

Плоскость, в которой используются привычные в геодезии расчетные формулы, можно рассматривать в пределах одной стоянки инструмента. При смене точки стояния инструмента организуется новая плоскость, нормальная по отношению к отвесной линии, но отличающаяся от предыдущей. При разности расстояний между точками стояния инструмента на 2 км линии горизонта различаются на величину около 1', это означает, что угол наклона линии, соединяющий два пункта, не является однозначной величиной, так как каждая точка линии имеет собственную величину угла наклона. Из этого следует важный вывод: углы наклона линии, измеренные на двух противоположных концах линии не равны друг другу, и разность углов наклона зависит от расстояния между пунктами измерения. В таком случае проекцию Гаусса–Крюгера можно считать условно плоской, в которой кривизна Земли учитывается методическими приемами, устанавливая инструмент по отвесной линии с помощью уровня (рис. 3).

Угол наклона линии измеряется относительно горизонтальной плоскости, а так как горизонтальная плоскость в каждой точке рассматриваемой линии различна, угол наклона линии – понятие неоднозначное. Например, если линия

AB находится в горизонтальной плоскости, воспроизведенной в точке A , то угол наклона линии AB равен 0 ($v_A = 0$) (рис. 4). Угол наклона этой же линии, измеренный в т. B , не равен 0 ($v_B \neq 0$): $v_B = \varphi = \rho(D/R)$, где D – длина дуги AB' ; R – радиус Земли в направлении линии визирования AB .

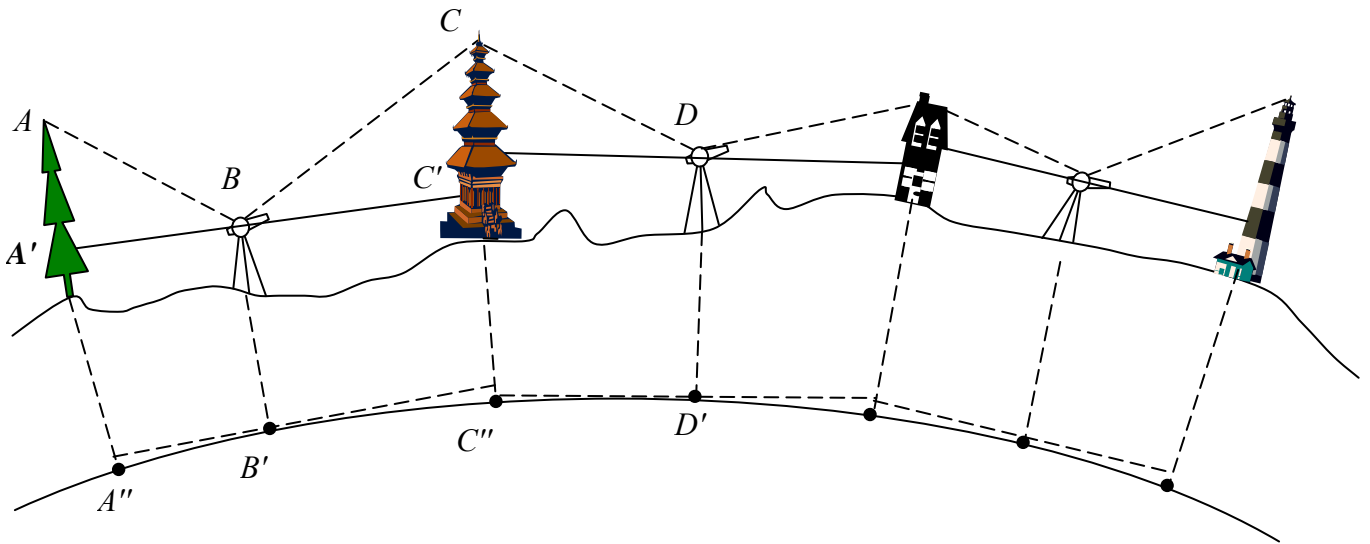


Рисунок 3. Иллюстрация методики учета влияния кривизны Земли в инженерно-геодезических работах

При относительно небольших расстояниях ($L < 10$ км) и небольших углах наклона $D \approx S$ (где S – горизонтальное проложение). В таком случае угол наклона равен $\varphi = -\rho \frac{S}{R}$. Следовательно, в рассматриваемом случае превышение точки B над точкой A в направлении AB равно 0, а в обратном направлении BA превышение равно

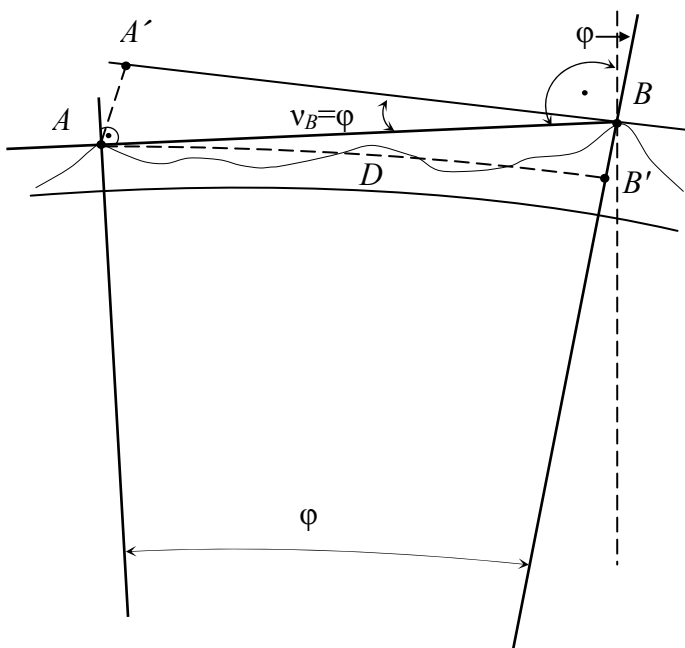


Рисунок 4. Линии горизонта на двух концах измеряемой линии различны

на равен $\varphi = -\rho \frac{S}{R}$. Следовательно, в рассматриваемом случае превышение точки B над точкой A в направлении AB равно 0, а в обратном направлении BA превышение равно

$$h_{BA} = S \cdot \sin v = -S \cdot \sin \frac{S}{R} = -\frac{S^2}{R}. \quad (5)$$

В табл. 1 приведены расчеты превышения по формуле (5).

Однозначным будет решение, если вычислить среднее значение превышения между «прямо» и «обратно».

Таблица 1

S , км	h_{AB}	φ	h_{BA} , м
0,15	0	4,8"	-0,0035
0,3	0	9,5"	-0,014
1	0	33"	-0,157
2	0	1'05"	-0,628
4	0	2'10"	-2,511
8	0	4'19"	-10,045

Горизонтальное проложение линии AB также будет различаться на величину:

$$S_{AB} - S_{BA'} = S - S \cos \varphi = S \left(1 - \cos \frac{S}{R}\right) = \frac{S^3}{2R^2}.$$

В общем случае разность горизонтальных проложений «прямо» и «обратно» имеет вид:

$$\delta = 2S \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left(\nu + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (6)$$

Следовательно, при малых углах наклона формула (6) имеет вид:

$$\delta = \frac{S^2 \nu}{\rho R} + \frac{S^3}{2R^2} \quad \text{или} \quad \delta = \frac{hS}{R} + \frac{S^3}{2R^2}, \quad \text{где } h - \text{превышение.}$$

При $S = 2$ км, $h = 40$ м, $R = 6371$ км, $\delta = 13$ мм, что существенно больше паспортной точности многих электронных тахеометров. Для исключения расхождений в результатах вычисления горизонтального проложения за окончательный вариант следует брать среднее значение из двух измерений: «прямо» и «обратно». В том случае, если наклонное расстояние измеряется только в одном направлении, целесообразно вводить поправку за кривизну Земли.

$$\begin{aligned} S_{cp} &= \frac{1}{2}(S_{AB} + S_{BA}) = S \cos \left(\nu + \frac{\varphi}{2} \right) \cos \frac{\varphi}{2} = \\ &= S \left(\cos \nu \cos^2 \frac{S}{2R} - \frac{h}{2S} \sin \frac{S}{R} \right) = S \cos \nu \left(1 - \frac{S^2}{4R^2} \right) - \frac{hS}{2R} \end{aligned}$$

$$\text{или } S_{cp} = S \cos \nu - \frac{hS}{2R} - \frac{S^3}{4R^2}.$$

Следовательно, при строительстве крупных инженерных сооружений необходим учет влияния кривизны Земли не только при тригонометрическом нивелировании, но и при светодальномерных и спутниковых измерениях.

В четвертой главе разработана методика учета кривизны земли при использовании результатов спутниковых измерений в инженерно-геодезических работах.

Как было показано ранее, проекция Гаусса–Крюгера наиболее удачно учитывает кривизну Земли, имеет строгие математические связи с эллипсоидальными координатами. Для разработки методики учета кривизны Земли при использовании результатов спутниковых измерений в инженерно-геодезических работах выполнены исследования точности вычисления приращений координат в проекции Гаусса–Крюгера. По результатам спутниковых измерений целесообразно вычислить эллипсоидальные координаты широту B и долготу L . Долготу вычислить легко, используя формулу $\operatorname{tg}L = \frac{Y}{X}$, а широту целесообразно вычислять по формуле Боуринга, преобразованную к виду, удобному для вычисления по результатам спутниковых измерений

$$\operatorname{tg}B = \frac{Z}{R} \cdot \frac{r^3 + be'^2 Z^2}{r^3 - be(1 - e^2)R^2}, \quad (7)$$

где $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$; $r = \sqrt{Z^2 + (X^2 + Y^2)(1 - e^2)}$; $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ – первый эксцентриситет; $e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2}$ – второй эксцентриситет; $b = a\sqrt{1 - e^2}$ – малая полуось отсчетного эллипсоида.

Представим формулу (7) в следующем виде:

$$\operatorname{tg}B = \frac{Z}{R} \cdot \frac{1 + e'^2 \frac{bZ^2}{r^3}}{1 - e^2 \frac{(1 - e^2)R^2}{r^3}}. \quad (8)$$

Анализ формулы (7) показывает, что коэффициент

$$k = \frac{1 + e'^2 \frac{bZ^2}{r^3}}{1 - e^2 \frac{(1 - e^2)R^2}{r^3}}$$

мало отличается от единицы. Для Вьетнама, широта которого $B \approx 22^\circ$, коэффи-

циент $k = 1,001$. Следовательно, для оценки точности возможно упрощение формулы (8) до вида $\operatorname{tg} B \approx Z/R$, так как влияние коэффициента k на расчет точности пренебрегаемо мал. По результатам абсолютных определений координат на пункте 1 по результатам спутниковых измерений X_1, Y_1 и Z_1 широта может быть вычислена по формуле:

$$\operatorname{tg} B_1 = \frac{Z_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}. \quad (9)$$

Формула (9) не может быть использована для обработки высокоточных измерений, ее целесообразно использовать только для оценки точности.

Используя результаты высокоточных фазовых определений декартовых координат, вычисляют координаты остальных пунктов:

$$X_i = X_1 + \Delta X_i; \quad Y_i = Y_1 + \Delta Y_i; \quad Z_i = Z_1 + \Delta Z_i.$$

Следовательно, широты этих пунктов могут быть вычислены по приближенной формуле

$$\operatorname{tg} B_i = \frac{Z_1 + \Delta Z_i}{\sqrt{(X_1 + \Delta X_i)^2 + (Y_1 + \Delta Y_i)^2}}. \quad (10)$$

Для удобства оценки точности выполним преобразование формулы (10), используя разложения в степенные ряды, в результате получим

$$\operatorname{tg}(B_1 + \Delta B_i) - \operatorname{tg} B_1 = \frac{\sin \Delta B_i}{\cos B_i \cos \Delta B_i} = \frac{\Delta Z_i}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} - \frac{Z_1 X_1 \Delta X_i}{(X_1^2 + Y_1^2)^{3/2}} - \frac{Z_1 Y_1 \Delta Y_i}{(X_1^2 + Y_1^2)^{3/2}}. \quad (11)$$

В инженерно-геодезических сетях разность широт между пунктами ΔB_i обычно составляет единицы минут, т.е. для оценки точности можно принять

$$\sin \Delta B_i = \frac{\Delta B_i}{\rho}; \quad \cos \Delta B_i = 1,$$

и выражение (11) можно записать в виде:

$$\frac{\Delta B_i}{\rho} = \frac{\cos B_i}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} \left(\Delta Z_i - \frac{Z_1 X_1 \Delta X_i}{X_1^2 + Y_1^2} - \frac{Z_1 Y_1 \Delta Y_i}{X_1^2 + Y_1^2} \right). \quad (12)$$

Используя (9), выразим $\cos B_1$ через прямоугольные координаты:

$$\cos B_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 B_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Z_1^2}{X_1^2 + Y_1^2}}} = \frac{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}. \quad (13)$$

С учетом (13) представим (12) в виде:

$$\frac{\Delta B_i}{\rho} = \Delta Z_i (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) - Z_1 (X_1 \Delta X_i + Y_1 \Delta Y_i) (X_1^2 + Y_1^2) (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2). \quad (14)$$

Выполним анализ точности вычисления разности широт ΔB_i . С этой целью дифференцируем выражение (14):

$$\begin{aligned} \frac{d(\Delta B_i)}{\rho} = & \frac{d(\Delta Z_i)}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}} - \frac{X_1 Z_1 d(\Delta X_i)}{(X_1^2 + Y_1^2) \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}} - \\ & - \frac{Y_1 Z_1 d(\Delta Y_i)}{(X_1^2 + Y_1^2) \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}} + k_1 dX_1 + k_2 dY_1 + k_3 dZ_1, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} k_1 = & \frac{Z_1 \Delta X_i (X_1^2 Z_1^2 - Y_1^2 Z_1^2 - X_1^2 Y_1^2) + (X_1^2 + Y_1^2) X_1 \Delta Z_i + Z_1 X_1 Y_1 \Delta Y_i (X_1^2 + Y_1^2 + 2Z_1^2)}{(X_1^2 + Y_1^2) (X_1^2 + Y_1^2 + 2Z_1^2) \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}; \\ k_2 = & \frac{Z_1 \Delta Y_i (X_1^4 + X_1^2 Z_1^2 - 2Y_1^4 - Y_1^2 Z_1^2 - Y_1^2 X_1^2) + Y_1 \Delta Z_i (X_1^2 + Y_1^2)^2 + X_1 Y_1 Z_1 \Delta X_i (X_1^2 + Y_1^2 + 2Z_1^2)}{(X_1^2 + Y_1^2) (X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2) \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}; \\ k_3 = & \frac{Z_1 (X_1^2 + Y_1^2) \Delta Z_i - Z_1^2 X_1 (X_1^2 + Y_1^2) \Delta X_i - Z_1^2 Y_1 (X_1^2 + Y_1^2) \Delta Y_i}{(X_1^2 + Y_1^2) (X_1^2 + Y_1^2 + 2Z_1^2) \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}}. \end{aligned}$$

Переходя к средним квадратическим ошибкам, полагая, что

$$m_{\Delta X}^2 = m_{\Delta Y}^2 = m_{\Delta Z}^2 = m_{\Delta}^2, \text{ а } m_X^2 = m_Y^2 = m_Z^2 = m_k^2,$$

получим

$$\frac{m_{\Delta B_i}^2}{\rho^2} = (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) m_k^2 + \left(1 + \frac{Z_1^2}{R_1^2}\right) \frac{m_{\Delta}^2}{R_3^2}, \quad (15)$$

где R_3 – радиус Земли.

Следует особо подчеркнуть, что формула оценки точности (15) носит приближенный характер, так как не учтены коэффициенты корреляции. В настоящее время неизвестны зависимости между ошибками вычислений как координат пунктов, так и разностей координат. Реальная точность может быть не-

сколько выше, чем та, что показывает формула (15). Анализ формулы (15) показал, что ошибки координат пунктов в 200-300 м практически не оказывают влияния на точность вычисления разностей широт при расстояниях между пунктами до 20 км.

Из формулы вычисления разностей абсцисс:

$$d\Delta x_i \approx a \frac{d\Delta B_i}{\rho},$$

следовательно,

$$m_{\Delta x_i} = \frac{am_{\Delta B_i}}{\rho}$$

или с учетом (15) для инженерно-геодезических работ можно считать

$$m_{\Delta x} = m_{\Delta}.$$

Аналогичный анализ выполним для разностей долгот пунктов ΔL_i , используя формулу (8):

$$\operatorname{tg} L_2 = \operatorname{tg}(L_1 + \Delta L_i) = \frac{Y_1 + \Delta Y_i}{X_1 + \Delta X_i} \approx \frac{Y_1}{X_1} + \frac{\Delta Y_i}{X_1} - \frac{Y_1 \Delta X_i}{X_1^2}; \quad \operatorname{tg}(L_1 + \Delta L_i) - \operatorname{tg} L_1 = \frac{\Delta Y_i}{X_1} - \frac{Y_1 \Delta X_i}{X_1^2},$$

откуда получим

$$\frac{\sin \Delta L_i}{\cos L_1 \cos \Delta L_i} = \frac{\Delta Y_i}{X_1} - \frac{Y_1 \Delta X_i}{X_1^2}.$$

Как и ранее, примем $\sin \Delta L_i = \frac{\Delta L_i}{\rho}$; $\cos \Delta L_i = 1$.

Выразим величину $\cos L_i$ через прямоугольные координаты:

$$\cos L_i = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 L_i}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{Y_1^2}{X_1^2}}} = \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta L_i}{\rho} = \frac{\Delta Y_i}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} - \frac{Y_1 \Delta X_i}{X_1 \sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}. \quad (16)$$

Выполним анализ точности вычисления разности долгот. Так как формула (8) справедлива при $X_1 > Y_1$, то второй член выражения (16) существенно меньше первого, и для оценки точности можно принять

$$\frac{\Delta L_i}{\rho} = \frac{\Delta Y_i}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}. \quad (17)$$

Дифференцируем выражение (17), получим

$$\frac{d(\Delta L_i)}{\rho} = \frac{d(\Delta Y_i)}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}} - \frac{\Delta Y_i (X_1 dX_1 + Y_1 dY_1)}{(X_1^2 + Y_1^2)\sqrt{X_1^2 + Y_1^2}}.$$

Переходя к средним квадратическим ошибкам, получим (полагая $m_{X_1}^2 = m_{Y_1}^2 = m_k^2$):

$$\frac{m_{\Delta L_i}^2}{\rho^2} = \frac{m_{\Delta}^2}{R^2} + \frac{\Delta Y_i^2 m_k^2}{R^2}.$$

Для оценки точности ординаты пунктов в проекции Гаусса–Крюгера можно представить в виде

$$y = \frac{l''}{\rho} N \cos B,$$

а приращения ординат равно

$$\Delta y_i = \frac{\Delta l_i''}{\rho} N (\cos B_i - \cos B_1) = -\frac{2\Delta l_i}{\rho} N \left(\sin \frac{B_1 + B_2}{2} \sin \frac{\Delta B}{2} \right)$$

или, учитывая, что

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B}} \approx a; \quad \Delta y_i = -a \frac{\Delta l_i \Delta B_i}{\rho^2} \sin B_{cp}, \quad (18)$$

где $B_{cp} = \frac{B_1 + B_2}{2}$.

Сопоставляя формулы (15) и (18), нетрудно прийти к выводу, что разности координат пунктов в проекции Гаусса–Крюгера практически не зависят от ошибок координат пунктов и зависят лишь от точности определения разностей координат спутниковых измерений в системах координат WGS-84 и ПЗ-90.

В работе рассмотрена методика учета кривизны земли при использовании спутниковых методов в местных системах координат. Анализ точности показал, что точность определения координат исходного пункта мало влияет на приращения координат в проекции Гаусса–Крюгера. Ошибка в координатах исходного пункта в 300 м не вносит заметных искажений в приращения координат в проекции Гаусса–Крюгера. Это означает, что даже в случае, когда не известны

абсолютные координаты пунктов, возможен пересчет координат в проекцию Гаусса–Крюгера с учетом кривизны Земли. Алгоритм расчета должен быть следующим.

Учитывая все ранее изложенные обстоятельства, алгоритм подготовки результатов спутниковых измерений к преобразованию имеет следующий вид.

1. Вычисляются декартовы координаты всех пунктов в системе координат WGS-84 или ПЗ-90 по формулам:

$$X_i = X_0 + \Delta X_i; \quad Y_i = Y_0 + \Delta Y_i; \quad Z_i = Z_0 + \Delta Z_i,$$

где X_0, Y_0, Z_0 – координаты одного из пунктов, выбранного за опорный; роль опорного пункта сохраняется за ним на весь период строительства объекта, а координаты X_0, Y_0, Z_0 не изменяются весь период работ; $\Delta X_i, \Delta Y_i, \Delta Z_i$ – приращения координат, определенные с высокой точностью.

2. Вычисляются криволинейные координаты пунктов:

$$\operatorname{tg} L_i = \frac{Y_i}{X_i};$$

$$\operatorname{tg} B_i = \frac{Z_i + be'^2 \sin^3 \theta_i}{R_i - ae^2 \cos^3 \theta_i};$$

$$R_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2};$$

$$\sin \theta_i = \frac{Z_i}{\sqrt{Z_i^2 + R_i^2 (1 - e^2)}};$$

$$\cos \theta_i = \frac{R_i (1 - e^2)^{1/2}}{\sqrt{Z_i^2 + R_i^2 (1 - e^2)}};$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1 - e^2};$$

e^2 – первый эксцентриситет;

a и b – большая и малая полуоси отсчетного эллипсоида (о нем будет пояснено позднее подробно).

3. Вычисляются координаты пунктов в проекции Гаусса–Крюгера:

$$x_i = X + a_2 l^2 + a_4 l^4 + a_6 l^6 + a_8 l^8; \quad y_i = b_1 l_1 + b_3 l^3 + b_5 l^5 + b_7 l^7,$$

где $a_2 = \frac{1}{2} N \sin B \cos B;$

$$a_4 = \frac{1}{24} N \sin B \cos^3 B (5 - \operatorname{tg}^2 B + 9\eta^2 + 4\eta^4);$$

$$a_6 = \frac{1}{720} N \sin B \cos^5 B (61 - 58\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B + 270\eta^2 - 330\eta^2 \operatorname{tg}^2 B);$$

$$a_8 = \frac{1}{40320} N \sin B \cos^7 B (1385 - 3111\operatorname{tg}^2 B + 543\operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B);$$

$$b_1 = \frac{1}{6} N \cos B (-\operatorname{tg}^2 B + \eta^2);$$

$$b_5 = \frac{1}{120} N \cos^5 B (5 - 18\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^4 B - 14\eta^2 - 58\eta^2 \operatorname{tg}^2 B);$$

$$b_7 = \frac{1}{5040} N \cos^7 B (61 - 479\operatorname{tg}^2 B + 179\operatorname{tg}^4 B - \operatorname{tg}^6 B);$$

$$\eta = e' \cos B;$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)}};$$

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 B)^3}};$$

$$X = a(1 - e^2) \left(A_X \frac{B''}{\rho} - \frac{B_X}{2} \sin 2B + \frac{C_X}{4} \sin^4 B \right);$$

$$A_X = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4;$$

$$B_X = \frac{3}{4} e^2 + \frac{15}{16} e^4;$$

$$C_X = \frac{15}{64} e^4.$$

4. Вычисляются разности координат между пунктами с номером i и опорным пунктом:

$$\Delta x_i = x_i - x_{on}; \quad \Delta y_i = y_i - y_{on}.$$

5. Выбираются два желательного наиболее удаленных друг от друга пункта, и вычисляется дирекционный угол этой линии в местной системе координат α_M , и по координатам, вычисленным по результатам спутниковых измерений α_S , по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$$

вычисляется величина их расхождений

$$\Delta\alpha = \alpha_M - \alpha_S.$$

6. Приращения координат, вычисленные по результатам спутниковых измерений, преобразуют в местную систему координат

$$\Delta x'_i = \Delta x_i \cos \Delta\alpha - \Delta y_i \sin \Delta\alpha;$$

$$\Delta y'_i = \Delta x_i \sin \Delta\alpha + \Delta y_i \cos \Delta\alpha.$$

Эти приращения являются результатом предварительного этапа преобразования. Это сделано для того, чтобы координаты и дирекционные углы были близки к координатам и дирекционным углам в местной системе координат.

7. Координаты пунктов, полученные по результатам спутниковых измерений в местной системе координат, могут быть представлены в следующем виде:

$$x_i = x_0 + \delta x_0 + \Delta x'_i \cos \delta\alpha - \Delta y'_i \sin \delta\alpha + \delta x_i;$$

$$y_i = y_0 + \delta y_0 + \Delta x'_i \sin \delta\alpha + \Delta y'_i \cos \delta\alpha + \delta y_i,$$

где δx_0 и δy_0 – смещение начала координат опорного пункта; $\delta\alpha$ – поправка к развороту систем координат; δx_i и δy_i – величины остаточного рассогласования координат пунктов, вычисленных по результатам спутниковых измерений после окончательного преобразования.

8. Предварительное преобразование координат по пункту 6 приведет к тому, что поправка $\delta\alpha$ является малой величиной, при этом $\cos \delta\alpha = 1$,

$\sin \delta\alpha = \frac{\delta\alpha}{\rho}$, следовательно

$$x_i = x_0 + \delta x_0 + \Delta x'_i - \Delta y'_i \frac{\delta \alpha}{\rho} + \delta x_i;$$

$$y_i = y_0 + \delta y_0 + \Delta x'_i \frac{\delta \alpha}{\rho} + \Delta y'_i + \delta y_i.$$

Откуда получим:

$$\delta x_i = x_i - x_0 - \Delta x'_i + \Delta y'_i \frac{\delta \alpha}{\rho} - \delta x_0;$$

$$\delta y_i = y_i - y_0 - \Delta x'_i \frac{\delta \alpha}{\rho} - \Delta y'_i - \delta y_0.$$

Для вычисления наиболее достоверных значений параметров преобразования составим целевую функцию F :

$$F = \sum_{i=1}^n (\delta x_i^2 + \delta y_i^2) \rightarrow \min.$$

Несмотря на то, что целевая функция F составлена как минимум суммы квадратов остаточного рассогласования координат пунктов, это не является методом наименьших квадратов Гаусса. В результате вычисления будут получены наиболее достоверные параметры преобразования, но выполнить оценку точности вычисленных величин и их функций по алгоритму, разработанному Гауссом, будет невозможно. В развернутом виде целевая функция имеет вид

$$F = \sum_{i=1}^n \left(x_i - x_0 - \Delta x'_i + \Delta y'_i \frac{\delta \alpha}{\rho} - \delta x_0 \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(y_i - y_0 - \Delta x'_i \frac{\delta \alpha}{\rho} - \Delta y'_i - \delta y_0 \right)^2 \rightarrow \min.$$

Минимум целевой функции F будет достигнут в том случае, если будут выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial F}{\partial \delta x_0} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \delta y_0} = 0; \quad \frac{\partial F}{\partial \delta \alpha} = 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=1}^n \left(x_i - x_0 - \Delta x'_i + \Delta y'_i \frac{\delta \alpha}{\rho} - \delta x_0 \right) = 0;$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(y_i - y_0 - \Delta x'_i \frac{\delta\alpha}{\rho} - \Delta y'_i - \delta y_0 \right) &= 0; \\ \sum_{i=1}^n \left(x_i - x_0 - \Delta x'_i + \Delta y'_i \frac{\delta\alpha}{\rho} - \delta x_0 \right) \Delta y'_i - \\ - \sum_{i=1}^n \left(y_i - y_0 - \Delta x'_i \frac{\delta\alpha}{\rho} - \Delta y'_i - \delta y_0 \right) \Delta x'_i &= 0. \end{aligned}$$

Или в окончательном виде

$$\begin{aligned} n\delta x_0 - \frac{\delta\alpha}{\rho} \sum_{i=1}^n \Delta y'_i + nx_0 + \sum_{i=1}^n \Delta x'_i - \sum_{i=1}^n x_i &= 0; \\ n\delta y_0 + \frac{\delta\alpha}{\rho} \sum_{i=1}^n \Delta x'_i + ny_0 + \sum_{i=1}^n \Delta y'_i - \sum_{i=1}^n y_i &= 0; \\ \delta x_0 \sum_{i=1}^n \Delta y'_i + \delta y_0 \sum_{i=1}^n \Delta x'_i + \frac{\delta\alpha}{\rho} \sum_{i=1}^n (\Delta y_i^2 - \Delta x_i^2) + x_0 \sum_{i=1}^n \Delta y'_i + \\ + y_0 \sum_{i=1}^n \Delta x'_i + 2 \sum_{i=1}^n \Delta x'_i \Delta y'_i - \sum_{i=1}^n x_i \Delta y'_i - \sum_{i=1}^n y_i \Delta x'_i &= 0. \end{aligned}$$

Полученные параметры преобразования позволяют не только удачно вписаться в местные опорные геодезические сети, но и в полной мере учесть влияние кривизны Земли.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обзор наиболее характерных современных строительных объектов показал, что они становятся все более протяженными в длину и высоту, более технологически сложными и требуют более совершенного геодезического сопровождения на этапе строительства. Реализации наиболее смелых архитектурных и технологических решений способствует быстрое развитие высокоточных геодезических приборов, среди которых в первую очередь следует отнести высокоточные электронные тахеометры и спутниковые приемники. Эти обстоятельства обязывают более внимательно относиться к методам обработки результатов высокоточных геодезических измерений. Автор диссертации поставил перед собой научную задачу: исследовать и усовершенствовать методы учета кривизны Земли в высокоточных инженерно-геодезических работах.

Результаты исследований, выполненные лично автором диссертации, можно сформулировать следующими положениями.

1. При учете кривизны Земли неизбежны потери точности, сопровождающие обработку результатов измерений. Разумным критерием точности может служить средняя квадратическая ошибка центрирования геодезических приборов над центром знака, которая, как правило, равна 0,5-0,7 мм. В связи с этим поставим условие, чтобы алгоритмы обработки результатов измерений не вносили дополнительных ошибок, по возможности более 0,5 мм.

2. Исследования искажений, вызванных кривизной Земли показали, что в плановых сетях учитывать кривизну Земли целесообразно при расстояниях свыше 4 км, а при высотных измерениях – при расстояниях свыше 150 м. Это означает, что при использовании результатов спутниковых измерений в инженерно-геодезических сетях необходимо плановую и высотные составляющие решать отдельно. Недопустимо преобразовывать результаты спутниковых измерений в местные плановые без учета кривизны Земли.

3. Тщательный обзор методов учета кривизны Земли при тригонометрическом нивелировании позволил автору получить более строгую формулу вычисления превышения:

$$h = S \frac{\sin \frac{v_1 - v_2}{2}}{\cos \frac{v_1 + v_2}{2}}.$$

4. Угол наклона линии, соединяющей два пункта, не является однозначной величиной, так как каждая точка этой линии имеет собственную величину угла наклона. Следовательно, углы наклона линии, определенные на двух крайних пунктах линии, различны, а из-за этого горизонтальные проложения одной и той же линии в направлении «прямо» и «обратно» различаются на величину

$$\delta = \frac{hS}{R} + \frac{S^3}{2R^2},$$

которая может существенно превышать паспортную точность определения длины линий высокоточными электронными тахеометрами. Для исключения

расхождений в результатах вычисления горизонтального проложения за окончательный вариант следует брать среднее значение из двух измерений «прямо» и «обратно».

В том случае, если наклонное расстояние измеряется только в одном направлении, необходимо вводить поправку за кривизну Земли:

$$S_{cp} = S \cos v - \frac{hS}{2R} - \frac{S^3}{4R^2}.$$

5. При использовании результатов спутниковых измерений в инженерно-геодезических работах необходимо учитывать кривизну Земли. Для этой цели проекции Гаусса–Крюгера или UTM являются наиболее целесообразными, особенно в случае использования сетей в местной системе координат. Анализ точности показал, что ошибки определения абсолютных координат в пределах 300-400 м не оказывают заметного влияния на вычисления разностей координат в проекции Гаусса–Крюгера. Эти исследования позволили обосновать методику учета кривизны Земли в местной системе координат.

ПУБЛИКАЦИИ

1. Чан Куанг Хок, Чинь Тхань Чыонг. Оценка точности вычисления координат в проекции Гаусса–Крюгера по результатам спутниковых измерений. М.: Геодезия и аэрофотосъемка. -№ 2, 2012.
2. Чинь Тхань Чыонг, Ключин Е.Б., Кравчук И.М., Чан Куанг Хок. Учет влияния кривизны Земли при инженерно-геодезических работах // М.- Геодезия и аэрофотосъемка. -№ 1. -2012.
3. Чинь Тхань Чыонг, Ваганов И.А. Учет влияния кривизны Земли при высокоточных измерениях линий // Доклад на 66-й научн.-техн. конф. студентов, аспирантов и молодых ученых МИИГАиК, посвященной 50-й годовщине первого полета человека в космос – Летчика-Космонавта СССР Юрия Алексеевича Гагарина. 5-6 апреля 2011 г.

Подписано в печать 09.05.2012. Гарнитура Таймс
Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Объем 1,5 усл. печ. л. Тираж 80 экз. Заказ №17 Цена договорная
Издательство МИИГАиК 105064, Москва, Гороховский пер., 4