

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РФ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ГЕОДЕЗИИ И КАРТОГРАФИИ
(МИИГАиК)

Веревочкин Ю.Г., Кузнецов А.А.,
Падалка Н.М., Скорохватов Н.А.,
Стрижкин И.И., Феофилактова Т.В.

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МЕХАНИКЕ

Для студентов I курса
дневного отделения

Москва 2006

Составители: Веревокин Ю.Г., Кузнецов А.А.,
Падалка Н.М., Скорохватов Н.А.,
Стрижкин И.И., Феофилактова Т.В.

Сборник задач по механике. Под редакцией проф. Ю.А. Ильина
—М., Изд.МИИГАиК, 2006, 44 с.

Сборник задач составлен в соответствии с утвержденной программой курса «ФИЗИКА», рекомендован кафедрой физики к изданию.

В сборнике наряду с вариантами контрольной работы содержатся разбор характерных задач и краткие теоретические сведения, что должно помочь студентам при самостоятельном решении задач.

ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ МЕХАНИКИ

Кинематика

Поступательное движение	Вращательное движение
$\bar{V} = \frac{d\bar{r}}{dt}; \bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt}$	$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt}; \bar{\varepsilon} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}$
Равномерное движение	
$V_x = const$	$\omega_z = const$
$x = x_0 + V_x t$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_z t$
Движение с постоянным ускорением	
$a_x = const$	$\varepsilon_z = const$
$V_x = V_{0x} + a_x t$	$\omega_z = \omega_{0z} + \varepsilon_z t$
$x = x_0 + V_{0x} t + \frac{a_x t^2}{2}$	$\varphi = \varphi_0 + \omega_{0z} t + \frac{\varepsilon_z t^2}{2}$

Связь между угловыми и линейными величинами:

Связь угла поворота φ и числа оборотов N : $\varphi = 2\pi N$;

Связь циклической частоты ω (рад/с) с частотой вращения n (об/с):

$$\omega = 2\pi n$$

$$s = \varphi R; V = \omega \cdot R; a_\tau = \varepsilon R; a_n = \omega^2 R = \frac{V^2}{R}$$

Полное ускорение: $\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$;

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

$$\text{Средняя скорость перемещения: } \langle \bar{V} \rangle = \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}; \langle V_x \rangle = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Средняя путевая скорость: $\langle V \rangle = \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Среднее ускорение: $\langle a \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$; $\langle a_x \rangle = \frac{v_{x2} - v_{x1}}{t_2 - t_1}$

Движение тела в поле тяготения:

по горизонтали: $x = x_0 + v_{0x}t$

$$v_x = v_{0x}$$

по вертикали: $y = y_0 + v_{0y}t + \frac{g_y t^2}{2}$

$$v_y = v_{0y} + g_y t$$

Динамика

Импульс материальной точки: $\vec{p} = m\vec{v}$

Второй закон Ньютона: $\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, где $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$

Координаты центра масс системы материальных точек:

$$X_c = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}; Y_c = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}; Z_c = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

Сила трения скольжения: $F = \mu N$

Сила упругости: $F_x = -kx$

Закон всемирного тяготения: $F = G \frac{Mm}{r^2}$

Сила тяжести: $\vec{F} = m\vec{g}$, где $g = 9,8 \text{ м/с}^2$ ($h \ll R$), где R радиус Земли, h - высота над поверхностью Земли

Закон сохранения импульса: $\vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \text{const}$ или

$\vec{p}_{\text{нач}} = \vec{p}_{\text{кон}}$, если $\sum_i \vec{F}_i^{\text{внеш}} = 0$

Работа постоянной силы на перемещении $\Delta \vec{r}$: $A = (\vec{F} \Delta \vec{r}) = F \Delta r \cos \alpha$

Работа переменной силы: $A = \int_L (\vec{F} d\vec{r}) = \int_L F \cos \alpha dr$

Кинетическая энергия: $W = \frac{mv^2}{2}$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия: $U = -G \frac{Mm}{r}$

Потенциальная энергия гравитационного взаимодействия материальной точки массой m и Земли массой M :

$U = -G \frac{Mm}{R+h}$, где R - радиус Земли, h - высота над поверхностью Земли

Потенциальная энергия в поле тяготения при условии $h \ll R$: $U = mgh$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела: $U = \frac{kx^2}{2}$

Работа консервативных сил: $A_{\text{конс}} = U_{\text{нач}} - U_{\text{кон}}$

Работа неконсервативных сил: $A_{\text{неконс}} = E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}}$, где $E = U + W$ - полная механическая энергия

Закон сохранения механической энергии: $E_{\text{кон}} = E_{\text{нач}}$, если $A_{\text{неконс}} = 0$; или

$$E = W + U = \text{const}$$

КИНЕМАТИКА

1. Система отсчета. Траектория, путь и перемещение. (§1¹)
2. Векторы и действия над ними. (§1)
3. Скорость и ускорение как производные радиус-вектора по времени. (§2)
4. Равномерное и равнопеременное движение. (§2)
5. Угловая скорость и ее связь с линейной скоростью. (§4)
6. Нормальное, тангенциальное и угловое ускорения. (§3, 4)
7. Связь между угловыми и линейными величинами ускорений в случае вращения тела вокруг неподвижной оси. Равномерное и равнопеременное движения по окружности. (§4)

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Закон инерции и инерциальные системы отсчета. Преобразования Галилея. (§5)
2. Масса. Сила. Второй и третий законы Ньютона. (§6, 7)
3. Импульс материальной точки и системы материальных точек. (§9)
4. Закон сохранения импульса замкнутой системы. (§9)
5. Центр масс системы материальных точек и закон его движения. (§9)
6. Силы в механике. (§8, 22)

РАБОТА И ЭНЕРГИЯ

1. Работа переменной силы. Мощность. (§11)

¹ Номера параграфов даны по изданию: Т. И. Трофимова. Курс физики. М.: Высшая школа, 1998.

2. Кинетическая энергия системы и ее связь с работой внешних и внутренних сил. (§12)
3. Потенциальная энергия и ее связь с работой консервативных сил. (§12)
4. Потенциальная энергия материальной точки в однородном поле тяжести, центральном гравитационном поле. Потенциальная энергия силы упругости. (§12, 25)
5. Потенциальная энергия систем материальных точек. Законы изменения и сохранения полной механической энергии. (§13, 15)

КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

1. Гармонические колебания. Дифференциальное уравнение гармонических колебаний. (§140, 141)
2. Энергия гармонических колебаний. Математический маятник. (§140, 141)
3. Сложение гармонических колебаний одного направления и одинаковой частоты. Битания. (§144)
4. Сложение взаимно-перпендикулярных гармонических колебаний. Фигуры Лиссажу. (§145)
5. Дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение. (§146)
6. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний и его решение. (§147)
7. Амплитуда и фаза вынужденных колебаний. Резонанс. (§148)
8. Продольные и поперечные волны в упругой среде. Уравнение бегущей волны. Энергия волны. (§153)

Пример 1. Материальная точка движется по окружности радиуса $R=0,1\text{ м}$ согласно уравнению $\varphi=A+Vt^3$, где $A=54\text{ рад/с}$; $V=-2\text{ рад/с}^3$. Через какое время после начала вращения скорость точки будет равна нулю? Найти в этот момент полное ускорение точки.

Решение. В условии задан кинематический закон вращательного движения материальной точки, из которого можно определить зависимость угловой скорости ω и углового ускорения ε от времени

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = A + 3Vt^2, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 6Vt$$

Линейная скорость связана с угловой скоростью

$$v = \omega R$$

По условию $v=0$, поэтому $\omega=0$, или $A+3Vt^2=0$

Откуда находим время

$$t = \sqrt{\frac{A}{3V}}$$

Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R = 0$

Тангенциальное ускорение $a_t = \varepsilon R = 6VtR$

Полное ускорение $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_t$

Произведем вычисления $t = \sqrt{\frac{54}{3(-2)}} = 3\text{ с}$

$$a_t = 6 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 0,1 = -3,6\text{ м/с}^2$$

$$a = 6 \cdot (-2) \cdot 3 \cdot 0,1 = -3,6$$

$$a = -3,6\text{ м/с}^2$$

Пример 2.

Тело брошено с некоторой высоты горизонтально со скоростью $v_0 = 15\text{ м/с}$. Найти нормальное a_n и тангенциальное a_t ускорения через время $t=1\text{ с}$ после начала движения тела.

Решение.

Как видно из рис. составляющие ускорения по направлению нормали $0n$ $a_n = g \cos \alpha$ и по направлению касательной $0t$ $a_t = g \sin \alpha$.

Угол α между нормалью и ускорением g равен углу между горизонтальной составляющей скорости v_x и скоростью v , так как эти углы с взаимно перпендикулярными сторонами (v_x горизонтальна и, следовательно, перпендикулярна g , v направлена по касательной и потому перпендикулярна нормали $0n$. Согласно тригоному, $\cos \alpha = v_x/v$ и $\sin \alpha = v_y/v$. Значения v_x и v_y в зависимости от времени t определяются уравнениями (1), (2) и (3).

$$v_x = v_0 \quad (1)$$

$$v_y = gt \quad (2)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \quad (3)$$

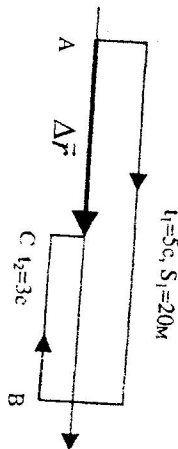
В результате получается $a_n = \frac{g v_0}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = 8,2\text{ м/сек}^2$ и

$$a_t = \frac{g v_y}{v} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = 5,4\text{ м/сек}^2.$$

Пример 3.

Тело, двигаясь прямолинейно, прошло за время $t_1=5\text{ с}$ расстояние $S_1=20\text{ м}$, затем, повернув обратно, прошло еще 4 м , двигаясь 3 с . Найти среднюю скорость перемещения тела и среднюю путевую скорость за все время.

Анализ. В задаче речь идет о движении тела, характеристиками которого в данном случае являются: время движения t , перемещение Δr , пройденный путь S , а также средняя скорость перемещения $v = \Delta r / \Delta t$ и средняя путевая скорость. Нарисуем схематический чертеж, на котором покажем траекторию движения тела, (в начале тело двигалось от А к В, после поворота от В к С) и его характеристики на каждом этапе.



Решение. Из чертежа определяем, что пройденный телом путь $S = S_1 + S_2 = 24 \text{ м}$, а величина перемещения $\Delta r = S_1 - S_2 = 16 \text{ м}$. Полное время движения: $t = t_1 + t_2 = 8 \text{ с}$. Средние скорости перемещения и пути находим из их определений:

$$v_r = \frac{\Delta r}{t} = \frac{s_1 - s_2}{t_1 + t_2} = \frac{16}{8} = 2 \text{ м/с};$$

$$v_s = \frac{s}{t} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2} = \frac{24}{8} = 3 \text{ м/с}$$

Пример 4.

На краю плота длиной $l = 10 \text{ м}$ и массой $m_1 = 320 \text{ кг}$ стоит человек массой $m_2 = 80 \text{ кг}$. Человек перешел на другой край плота. На сколько при этом переместился плот относительно берега? Плот находится в неподвижной воде, трение о воду не учитывать.

Дано:

Решение:

$l = 10 \text{ м}$ Плот и человек представляют замкнутую систему. Значит

10

$$\begin{aligned} m_1 &= 320 \text{ кг} & \text{для нее выполняется закон сохранения импульса:} \\ m_2 &= 80 \text{ кг} & R_1 = R_2, \\ S &= ? & \text{где } R_1 = 0 - \text{импульс плота с человеком до того, как человек} \end{aligned} \quad (1)$$

начал двигаться, R_2 - импульс плота с человеком во время движения человека.

Задачу решаем в системе отсчета, связанной с берегом, тогда

$$R_2 = m_2(V - U) - m_1 U, \quad (2)$$

где V - средняя скорость человека относительно плота, U - средняя скорость плота относительно берега.

Из (1) и (2) получим:

$$U = \frac{m_2 V}{m_1 + m_2}, \quad (3)$$

Тогда смещение плота относительно берега

$$S = U \cdot t, \quad (4)$$

где t - время движения человека по плоту, а значит и плота относительно берега, т.к., когда человек остановится, по закону сохранения импульса остановится и плот.

С другой стороны:

$$l = V \cdot t,$$

откуда

$$t = \frac{l}{V}, \quad (5)$$

Подставим (3) и (5) в (4), получим:

$$S = \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \quad (6)$$

Подставив в (6) численные значения, получим ответ: $S = 2 \text{ м}$.

Пример 5

11

Зенитный снаряд массой 36 кг разорвался в верхней точке траектории. При этом образовалось 3 осколка. Два осколка разлетелись под прямым углом друг к другу, причем скорость первого осколка массой 9 кг равна 60 м/с, а скорость второго массой 18 кг равна 40 м/с. Определить величину и направление скорости третьего осколка.

Дано:

$$M = 36 \text{ кг}$$

$$m_1 = 9 \text{ кг}$$

$$m_2 = 18 \text{ кг}$$

$$V_2 = 40 \text{ м/с}$$

$$V_3 = ?$$

$$\alpha = ?$$

Решение:

Т.к. силы возникающие при взрыве намного больше сил тяжести, последними можно пренебречь и считать снаряд с осколками замкнутой системой, в которой справедлив закон сохранения $V_1 = 60 \text{ м/с}$ импульса. Предполагая, что зенитный снаряд был выстрелен вертикально вверх, считаем, что скорость снаряда в верхней точке траектории, а значит и его импульс, равны нулю.

По закону сохранения импульса, импульс снаряда до взрыва равен векторной сумме импульсов осколков после взрыва:

$$0 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3, \quad (1)$$

где

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1$$

$$\vec{P}_2 = m_2 \vec{V}_2 \quad (2)$$

$$\vec{P}_3 = m_3 \vec{V}_3,$$

причем масса третьего осколка $m_3 = M - m_1 - m_2 = 9 \text{ кг}$

Как следует из (1),
 $-\vec{P}_3 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2, \quad (3)$

Изобразим (1) с учетом (3) на рисунке

Ось X направим по $\vec{P}_1$, а Y — по $\vec{P}_2$

По теореме Пифагора:

$$P_3 = |\vec{P}_1 + \vec{P}_2| = \sqrt{P_1^2 + P_2^2} = \sqrt{(m_1 V_1)^2 + (m_2 V_2)^2} \quad (4)$$

Подставить в (4) численные данные, $\vec{P}_3$

получим

$$P_3 = 900 \text{ кг м/с}$$

Поскольку $P_3 = m_3 V_3$, то $V_3 = \frac{P_3}{m_3} = 100 \text{ м/с}$

Найдем угол, под которым полетит третий осколок относительно оси X

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_2}{P_1} = \frac{m_2 V_2}{m_1 V_1} = \frac{4}{3} \approx 1,33$$

$$\text{Отсюда } \alpha = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} \approx 53^\circ$$

Пример 6.

В неподвижный шар ударяется другой такой же шар. Под каким углом разлетятся шары. Удар считать нецентральной и упругим.

Дано:

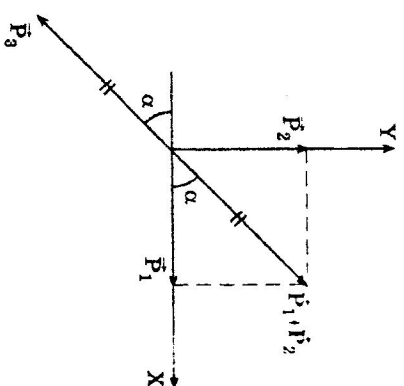
$$m_1 = m_2 = m$$

$$V_2 = 0$$

$$\alpha = ?$$

Решение:

Два шара представяют в данном случае замкнутую систему в которой действует сила упругости, являющаяся консервативной, а сила трения отсутствует. Следовательно в данной системе выполняются законы сохранения импульса и полной механической энергии.



Предположим, что скорость первого шара до удара $\vec{U}$, а скорость шаров после удара — $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ соответственно.

По закону сохранения импульса:

$$\vec{P}_1 = \vec{P}'_1 + \vec{P}'_2, \quad (1)$$

где $\vec{P}_1$ и $\vec{P}'_2$ — импульсы шаров после удара.

Изобразим (1) графически.

Из треугольника ABC по теореме косинусов получим:

$$P_1^2 = P_1'^2 + P_2'^2 - 2P_1'P_2' \cos \beta$$

или

$$m^2 V^2 = m^2 U_1'^2 + m^2 U_2'^2 - 2m^2 U_1' U_2' \cos \beta$$

откуда

$$V^2 = U_1'^2 + U_2'^2 - 2U_1' U_2' \cos \beta \quad (1)$$

Т.к. потенциальная энергия шаров

до и после удара одинакова, из закона сохранения полной механической энергии получим:

$$\frac{mV^2}{2} = \frac{mU_1'^2}{2} + \frac{mU_2'^2}{2}$$

или

$$V^2 = U_1'^2 + U_2'^2 \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем, что, поскольку $U_1' \neq 0$ и $U_2' \neq 0$, то $\cos \beta = 0$,

откуда $\beta = 90^\circ$.

Т.к. ABCD — параллелограмм, то $\alpha = 90^\circ$, т.е. шары разлетятся под прямым углом.

Пример 7

Тело массой 1 кг, подвешенное на нити, вращается в вертикальной плоскости. На сколько сила натяжения нити в нижней точке будет больше, чем в верхней? Трением и сопротивлением воздуха пренебречь.

Дано:

$$m = 1 \text{ кг}$$

$$T_1 - T_2 = ?$$

Решение:

По II закону Ньютона в нижней

точке

$$\vec{T}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}_1,$$

или в проекции на ось y_1 :

$$T_1 - mg = ma_1 \quad (1)$$

где $a_1 = \frac{V_1^2}{l}$ — нормальное

центростремительное ускорение тела в нижней точке. Тогда из (1)

$$T_1 = \frac{mV_1^2}{l} + mg \quad (2)$$

Аналогично для верхней точки:

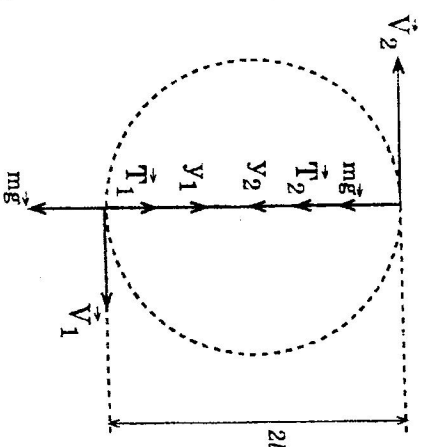
$$\vec{T}_2 + m\vec{g} = m\vec{a}_2,$$

или в проекции на ось y_2 :

$$T_2 + mg = \frac{mV_2^2}{l},$$

откуда

$$T_2 = \frac{mV_2^2}{l} - mg \quad (3)$$



Поскольку по условию сила трения отсутствует, а сила упругости и тяжести консервативны, для замкнутой системы тело — Земля справедлив закон сохранения полной механической энергии. Выберем нулевой уровень отсчета высоты в нижней точке траектории, тогда потенциальная энергия тела в этой точке равна нулю и закон сохранения полной механической энергии будет иметь вид:

$$\frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV_2^2}{2} + 2mgl \quad (4)$$

Из (4):

$$V_2^2 = V_1^2 - 4gl \quad (5)$$

Подставим (5) в (3):

$$T_2 = \frac{mV_1^2}{l} - \frac{4glm}{l} - mg = \frac{mV_1^2}{l} - 5mg \quad (6)$$

Из (2) и (6):

$$T_1 - T_2 = \frac{mV_1^2}{l} + mg - \frac{mV_1^2}{l} + 5mg = 6mg$$

Ответ: $T_1 - T_2 = 6mg = 60 \text{ Н}$

Пример 8. Два тела (материальные точки) массами $m_1 = 0,3 \text{ кг}$ и $m_2 = 0,4 \text{ кг}$ связаны невесомой нитью и движутся по горизонтальной поверхности (Земле) под действием силы $F = 1,4 \text{ Н}$, направленной

горизонтально и приложенной к телу m_1 (см. рис.). Определить ускорение, с которым будут двигаться тела и силу натяжения нити. Трением пренебречь.

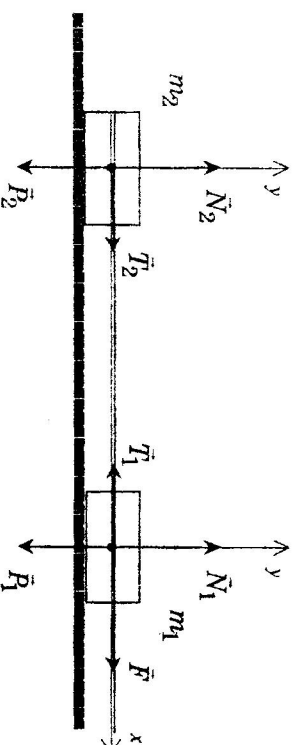


Дано: $m_1 = 0,3 \text{ кг}$; $m_2 = 0,4 \text{ кг}$; $F = 1,4 \text{ Н}$

Найти: a , T .

Решение. Рассмотрим тело m_1 , на него действует данная сила $\vec{F}$. Определим другие силы. Тело взаимодействует с Землей и нитью. Взаимодействие с Землей обуславливает силу тяжести $\vec{R}_1 = m_1 \vec{g}$ и силу реакции опоры $\vec{N}_1$, с нитью — силу упругости T_1 (см.рис.).

Рассуждая таким же образом, можно показать, что на тело m_2 действуют три



силы: сила тяжести $\vec{R}_2 = m_2 \vec{g}$, сила реакции опоры $\vec{N}_2$ и сила натяжения $\vec{T}_2$.

Заметим, что силы T_1 и T_2 равны; т.к. масса нити равна нулю, то по второму закону Ньютона для нити $T_1 - T_2 = 0$ и, следовательно $T_1 = T_2 = T$.

Далее, полагая, что Земля является инерциальной системой отсчета, запишем второй закон Ньютона в векторной форме для тела m_1 и m_2 соответственно:

$$m_1 \vec{a} = \vec{R}_1 + \vec{N}_1 + \vec{T}_1, \quad m_2 \vec{a} = \vec{R}_2 + \vec{N}_2 + \vec{T}_2$$

Для решения этих уравнений применим координатный метод, для чего необходимо выбрать систему координат x , y для каждого тела в отдельности. В случае прямолинейного движения одну из осей (x) направляют вдоль ускорения $\vec{a}$, а другую (y) — перпендикулярно. Тогда $a_x = a$, $a_y = 0$. В скалярной форме закон $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ будет иметь вид: $\Sigma F_x = ma_x$ и $\Sigma F_y = ma_y = 0$. Для тела m_1 имеем:

$$m_1 a = F - T \text{ и } 0 = N_1 - R_1, \text{ откуда } N_1 = R_1$$

Для тела m_2 соответственно:

$$m_2 a = T \quad \text{и} \quad N_2 = P_2$$

Решая совместно эти уравнения для m_1 и m_2 найдем:

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} = \frac{1,4}{0,3 + 0,4} = 2 \text{ м/с}^2 \quad \text{и} \quad T = m_2 a = 0,4 \cdot 2 = 0,8 \text{ Н.}$$

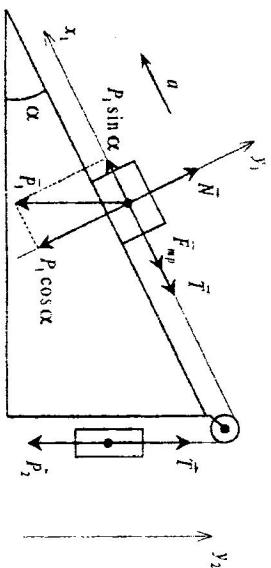
Формально, уравнения для оси y в данном случае не нужны. Однако, если есть трение, то выражение для силы N понадобится для определения силы трения скольжения $F_{тр} = \mu N$.

Пример 9. Груз массой 5 кг, связанный невесомой и нерастяжимой нитью, перекинутой через неподвижный блок, с другим грузом массой 2 кг, движется вниз по наклонной плоскости. Угол наклона плоскости к горизонту 36° . Коэффициент трения $\mu = 0,1$. Найти силу натяжения нити и ускорение грузов.

Дано: $m_1 = 5 \text{ кг}$; $m_2 = 2 \text{ кг}$; $\alpha = 36^\circ$; $\mu = 0,1$

Найти: T ; a

Решение. На первый груз действуют: сила тяжести $\vec{P}_1 = m_1 \vec{g}$, сила нормальной реакции плоскости $\vec{N}$, сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила трения $\vec{F}_{тр}$ (см. рис.).



и сила натяжения нити $\vec{T}$. Блок только изменяет направление нити.

Уравнение второго закона Ньютона в векторной форме для первого и второго

груза имеет вид: $\vec{P}_1 + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}_{тр} = m_1 \vec{a}$ и $\vec{P}_2 + \vec{T} = m_2 \vec{a}$ соответственно.

Для решения их выберем для каждого тела систему координат: для тела m_1 — x_1, y_1 , для тела m_2 — достаточно оси y_2 . Далее, необходимо силу $\vec{P}_1$, несомненно, разложить по осям координат, разложив на составляющие по осям x_1, y_1 : $P_x = P_1 \sin \alpha$, $P_y = P_1 \cos \alpha$. Теперь составим для первого и второго тела соответствующие уравнения второго закона для выбранных осей.

$$\text{Ось } x_1: \quad m_1 a = m_1 g \sin \alpha - T - F_{тр} \quad (1)$$

$$\text{Ось } y_1: \quad 0 = N - m_1 g \cos \alpha \quad (2)$$

$$\text{Ось } y_2: \quad m_2 a = T - m_2 g \quad (3)$$

Из уравнения (2) найдем, что $N = m_1 g \cos \alpha$, поэтому $F_{тр} = \mu N = \mu m_1 g \cos \alpha$. Подставляя это выражение в уравнение (1), получим:

$$m_1 a = m_1 g \sin \alpha - T - \mu m_1 g \cos \alpha \quad (4)$$

Сложив почленно уравнения (4) и (3), найдем

$$a = \frac{m_1 (\sin \alpha - \mu \cos \alpha) - m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{5(0,59 - 0,1 \cdot 0,81) - 2 \cdot 9,8}{5 + 2} \text{ м/с}^2 = 0,84 \text{ м/с}^2$$

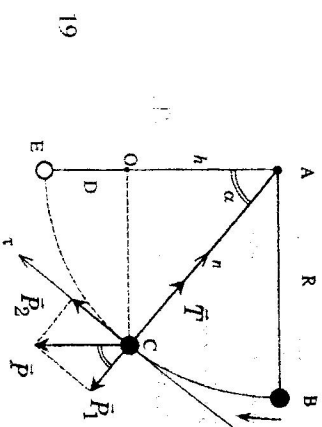
Силу натяжения нити определим из уравнения (3):

$$T = m_2 (g + a) = 2(2,8 + 0,84) \approx 21,3 \text{ Н.}$$

Пример 10. Тяжелый шар массой m подвешен на нерастяжимой и невесомой нити. Нить с шаром отклонена так, что занимает горизонтальное положение, и отпущена. При каком угле между нитью и вертикалью нить оборвется, если известно, что она выдерживает удвоенный вес находящегося шара? Трением и сопротивлением среды пренебречь. Шар считать материальной точкой.

Дано: $T_{\max} = 2P = 2mg$

Найти: α



Решение: При движении шара по дуге ВС (см.рис.) окружности радиуса R на него действуют: сила тяжести $\vec{P}$ и сила натяжения нити $\vec{T}$. Очевидно второй закон Ньютона для шара в векторной форме имеет вид:

$$\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$$

Особенность решения задач при движении тела по окружности (в общем случае по кривой) состоит в том, что одну ось (τ) направляют по касательной к кривой, а другую ось (n) — по радиусу к центру окружности. Допустимо системе координат обозначить x, y : Составляющую ускорения a (при $V \neq const$), направленную по оси и всегда к центру, называют нормальным ускорением a_n , или центростремительным. Разложив силу $\vec{P}$ на оси τ, n , можно сразу записать второй закон в проекции на ось n : $ma_n = \Sigma F_n$ или $ma_n = T - P_1$, где, как известно, $a_n = V^2/R$. Пусть в точке C нить оборвется, т.е. здесь $T = T_{max} = 2mg$. Так как $P_1 = mg \cos \alpha$, то, подставляя выражения для T и P_1 в уравнение движения, получим

$$\frac{mV_C^2}{R} = mg(2 - \cos \alpha) \quad (1)$$

Скорость V_C найдем из закона сохранения механической энергии считая, что потенциальная энергия в т.С равна нулю: $mgh = \frac{mV_C^2}{2}$; откуда $V_C^2 = 2gh$. Подставив это выражение в формулу (1), получим $2 - \cos \alpha = 2h/R$. Из рис. видно, что $h/R = \cos \alpha$. Следовательно, $\cos \alpha = 2/3$, $\alpha \approx 48^\circ$.

Пример 11

За какую часть периода тело, совершающее гармонические колебания, сместится из положения равновесия на расстояние, равное половине амплитуды колебаний?

Дано: $x(t) = A/2$; $x(0) = 0$. Найти: t/T .

Решение: смещение тела, совершающего гармонические колебания, описывается формулой: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. По условию задачи $x(t) - x(0) = A/2$, следовательно, $A \cos(\omega t + \varphi_0) - A \cos(\varphi_0) = A/2$. Из условия $x(0) = A \cos(\varphi_0) = 0$ можно определить начальную фазу колебаний: $\varphi_0 = \pi/2$. Тогда уравнение гармонических колебаний примет вид $x(t) = A \sin(\omega t)$, следовательно, $A \sin(\omega t) = A/2$.

Решив полученное тригонометрическое уравнение, будем иметь: $\omega t = \pi/6$. Собственная частота гармонических колебаний ω связана с периодом колебаний T формулой: $\omega = 2\pi/T$. Следовательно, $2\pi t/T = \pi/6$, или $t/T = 1/12$.

Пример 12

Груз массой m совершает гармонические колебания с амплитудой A на пружине с жесткостью k . Определить максимальную скорость груза и его полную механическую энергию.

Дано: m, k, A . Найти: V_{max} и E .

Решение: смещение тела, совершающего гармонические колебания, описывается формулой: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. Для нахождения скорости колебаний продифференцируем это уравнение по времени: $V(t) = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0)$. Максимальная скорость колебаний будет достигаться при обращении $\sin(\omega t + \varphi_0)$ в ± 1 . Следовательно, $V_{max} = A\omega$. Для пружинного маятника $\omega = \sqrt{k/m}$, тогда: $V_{max} = A\sqrt{k/m}$.

Полная механическая энергия гармонических колебаний E равна максимальному значению потенциальной энергии пружинного маятника $U=kx^2/2$. $E=U_{\max}=kA^2/2$. Ответ: $U_{\max}=A\sqrt{k/m}$, $E=kA^2/2$.

Пример 13.

Складываются два колебания одинакового направления, выражаемые уравнением:

$$x_1 = \cos\pi\left(t + \frac{1}{6}\right);$$

$$x_2 = 2\cos\pi\left(t + \frac{1}{2}\right).$$

(длина — в сантиметрах, время — в секундах). Требуется: 1) определить амплитуды, периоды и начальные фазы складываемых колебаний, 2) написать уравнение результирующего колебания.

Решение. Запишем уравнение гармонического колебания в общем виде

$$x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \quad (1)$$

Теперь преобразуем уравнения, заданные в условии задачи, к такому же виду:

$$x_1 = \cos\left(\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$x_2 = 2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) \quad (2) \text{ и } (3)$$

и сравним уравнения (2) и (3) с уравнением (1). Из сравнения находим для первого колебания: амплитуда $A_1=1$ см, период $T_1=2$ с и начальная фаза

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} \text{ рад} = 30^\circ$$

для второго колебания: $A_2=2$ см, $T_2=2$ с и

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} \text{ рад} = 90^\circ$$

Для того, чтобы написать уравнение результирующего колебания, надо определить период T , амплитуду A и начальную фазу φ результирующего колебания.

Из полученных результатов видно, что периоды складываемых колебаний одинаковы ($T=T_2=2$ с), следовательно и результирующее колебание будет иметь тот же период $T=2$ с.

Для определения амплитуды результирующего колебания удобно воспользоваться векторной диаграммой (см. рис.). Согласно теореме косинусов получим:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

Подставим числовые значения входящих в эту формулу величин и произведем вычисления:

$$A = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cos(90^\circ - 30^\circ)} \text{ см} \\ = \sqrt{7} \text{ см} = 2,6 \text{ см.}$$

Тангенс начальной фазы результирующего колебания определим непосредственно из рис.:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2},$$

откуда начальная фаза

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}.$$

Подставим числовые значения и произведем вычисления:

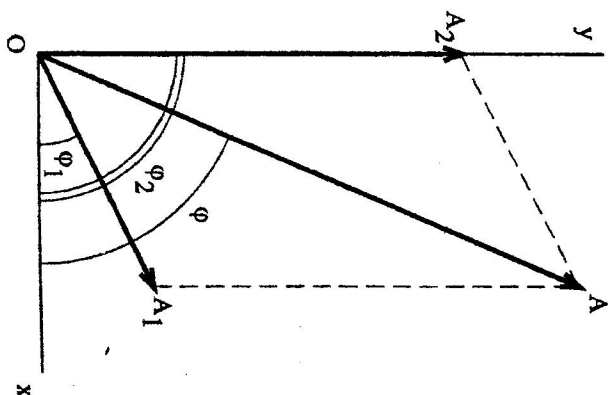
$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1 \cdot \sin 30^\circ + 2 \cdot \sin 90^\circ}{1 \cdot \cos 30^\circ + 2 \cdot \cos 90^\circ} = \operatorname{arctg} 2,88 = 71^\circ = 0,4\pi \text{ рад}$$

Таким образом, для результирующего колебания найдем:

$$T=2\text{ с; } A=2,6\text{ см; } \varphi=0,4\pi \text{ рад.}$$

Это позволяет написать уравнение результирующего колебания:

$$x = 2,6 \cos\left(\frac{2\pi}{2}t + 0,4\pi\right) \text{ (см), или}$$



$$x=2,6\cos t(t+0,4) \text{ (см.)}$$

Пример 14

Четыре гармонических колебания одного направления, уравнение которых задается функцией $\cos()$, имеют период 2 с и следующие параметры:

- 1) амплитуда 2 м и начальная фаза 0, 2) амплитуда 3 м и начальная фаза $\pi/2$, 3) амплитуда 4 м и начальная фаза π , 4) амплитуда 2 м и начальная фаза $-\pi/2$.

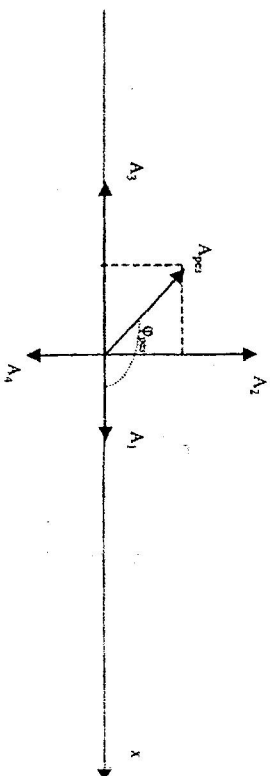
Найти уравнение результирующего колебания.

Дано: $x_1(t)=2\cos(\pi t)$; $x_2(t)=3\cos(\pi t+\pi/2)$; $x_3(t)=4\cos(\pi t+\pi)$; $x_4(t)=2\cos(\pi t-\pi/2)$.

Найти: уравнение результирующего колебания.

Решение: для нахождения уравнения результирующего колебания воспользуемся методом векторных диаграмм. Заданные четыре колебания одного направления и одинаковой частоты можно представить в виде четырех векторов, длина которых равна амплитуде, а направление задается углом с осью ox , равным начальной фазе каждого из колебаний.

Амплитуда результирующего колебания (см. рис.) будет равна:



$$A = \sqrt{(A_1 - A_3)^2 + (A_2 - A_4)^2} = \sqrt{(2-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{5} = 2,24 \text{ (м)}$$

Начальную фазу результирующего колебания найдем по формуле:

$$\operatorname{tg} \varphi = (A_2 - A_4) / (A_1 - A_3) = (3-2) / (2-4) = -0,5.$$

Таким образом, результирующее колебание можно записать в виде:

$$x(t)=2,24\cos(\pi t-\arctg(0,5)) \text{ (м)}$$

Номер варианта соответствует порядковому номеру фамилии студента в журнале группы. Решение задачи должно включать ее условие, последовательное изложение процесса решения с комментариями и рисунком, ответ в общем виде и численные расчеты в системе единиц СИ.

№ вар.	1	11	23	31	41	51	62	71	81	91	101
1	1	11	23	31	41	51	62	71	81	91	101
2	2	12	22	32	42	52	61	72	82	92	102
3	3	13	21	33	43	53	67	73	83	93	103
4	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	104
5	5	15	27	35	45	55	65	75	85	95	105
6	6	16	26	36	46	56	66	76	86	96	106
7	7	17	25	37	47	57	63	74	87	97	107
8	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98	108
9	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
11	1	12	23	32	41	52	62	72	81	99	101
12	2	11	22	31	42	51	61	71	82	98	102
13	3	14	21	34	43	54	67	77	83	97	103
14	4	13	24	33	44	53	64	73	84	96	104
15	5	15	26	35	46	55	66	75	86	95	105
16	6	16	27	36	45	56	65	76	85	94	106
17	7	17	28	37	48	57	68	74	88	93	107
18	8	18	25	38	47	58	63	78	87	92	108
19	9	19	29	39	50	60	69	79	90	91	109
20	10	20	30	40	49	59	70	80	89	100	110
21	1	11	22	32	41	51	62	71	81	91	101
22	2	12	23	31	42	52	61	72	82	92	102
23	3	13	21	33	43	53	67	73	83	93	103
24	4	14	24	34	44	54	64	74	84	94	104
25	5	15	26	35	46	55	66	75	86	95	105
26	6	16	27	36	45	56	65	76	85	94	106
27	7	17	25	37	47	57	63	74	87	97	107
28	8	18	28	38	48	58	68	78	88	98	108
29	9	19	29	39	49	59	69	79	89	99	109
30	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110

1. Колесо, вращаясь равномерно, при торможении уменьшило свою частоту вращения за 1 минуту с 300 об/мин до 180 об/мин. Определить угловое ускорение колеса и число оборотов, сделанных им за это время.
2. Вентилятор вращается с частотой 900 об/мин. После выключения, вращаясь равномерно, он сделал до остановки 75 об. Сколько времени прошло с момента выключения вентилятора до полной его остановки?
3. При равноускоренном движении из состояния покоя тело проходит за пятую секунду 0,9 м. Определить перемещение тела за седьмую секунду движения.
4. Тело падает с высоты $H = 45$ м без начальной скорости. Какое расстояние пройдет тело в последнюю секунду своего падения?
5. Тело падает с высоты $H = 45$ м без начальной скорости. За какое время пройдет тело последние 5 м своего пути?
6. С каким промежутком времени оторвались от карниза крыши две капли, если спустя 2 с после начала падения второй капли расстояние между каплями было 25 м?
7. На каком расстоянии от земли встретятся два тела, брошенные вертикально вверх друг за другом с интервалом $t = 1$ с, если начальная скорость у обоих $V_0 = 40$ м/с?
8. Над колодезем глубиной 12 м бросают вертикально вверх камень с начальной скоростью 14 м/с. Через сколько времени камень достигнет дна колодезя?
9. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с. Какой путь пройдет тело за третью секунду своего движения?
10. Тело брошено вертикально вверх с башни высотой 72 м. Время полета 6 с. Определить начальную скорость тела.
11. Камень брошен с вышки в горизонтальном направлении со скоростью $V_0 = 30$ м/с. Определить скорость V , тангенциальное a_t и нормальное a_n ускоре-

ния камня и радиус кривизны траектории в конце второй секунды после начала движения.

12. Тело брошено горизонтально. Через время $t = 5$ с угол между скоростью и ускорением составляет 60° . Найти скорость в этот момент времени.
13. Камень, брошенный с башни горизонтально, упал через 2 секунды. Известно, что в момент удара камня о землю вектор его скорости составлял 45° с вертикалью. Определить, на каком расстоянии от башни упал камень.
14. Мальчик ныряет в воду с крутого берега высотой 6 м, имея после разбега горизонтально направленную скорость 8 м/с. Какова величина и направление скорости мальчика при достижении им воды?
15. Если при горизонтальном бросании тела высоту увеличить на 8 м, то дальность его полета увеличится вдвое. Найти высоту места бросания.
16. Тело брошено в горизонтальном направлении с высоты 40 м. Найти время полета и начальную скорость, если дальность полета равна высоте бросания.
17. Мяч брошен под углом 30° к горизонту со скоростью 15 м/с. Определить горизонтальную и вертикальную составляющие начальной скорости, высоту подъема, время полета и дальность полета.
18. Под каким углом к горизонту надо бросить камень, чтобы дальность полета была в 4 раза больше высоты подъема?
19. Тело, брошенное под углом 45° к горизонту, находилось в полете 5 с. С какой скоростью было брошено тело и какова горизонтальная дальность полета? Какова максимальная высота подъема?
20. Тело, брошенное под углом к горизонту, находилось в полете 4 с. Какой максимальной высоты достигло тело?
21. Материальная точка вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Bt + Ct^2$, где $A = 10$ рад, $B = 20$ рад/с, $C = -2$ рад/с². Най-

ти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $R = 0,1$ м от оси вращения, для момента времени $t = 4$ с.

22. Материальная точка описала $1/4$ часть окружности радиусом 1 м за 3 секунды. Какова средняя скорость перемещения и средняя путевая скорость движения точки?
23. Закон движения материальной точки имеет вид: $X(t) = (3 - t)^2$. Найти перемещение и пройденный путь за промежуток времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 4$ с, а также среднюю путевую скорость и среднюю скорость перемещения.
24. Материальная точка движется по закону: $Y(t) = At + Ct^2 + Bt^4$, где $A = 6$ м/с, $C = 0,2$ м/с², $B = -0,125$ м/с⁴. Найти скорость и ускорение точки в моменты времени $t_1 = 0$ с и $t_2 = 2$ с, а также средние значения скорости и ускорения за первые 2 с движения.
25. Определить полное ускорение в момент $t = 3$ с материальной точки, находящейся на ободе колеса радиусом $R = 0,5$ м, вращающегося согласно уравнению $\varphi = At + Bt^3$, где $A = 2$ рад/с и $B = 0,2$ рад/с³.
26. Материальная точка вращается вокруг неподвижной оси по закону $\varphi = A + Ct^2 + Bt^3$, где $A = 10$ рад, $B = 0,5$ рад/с³, $C = -2$ рад/с². Найти полное ускорение точки, находящейся на расстоянии $R = 0,1$ м от оси вращения, для момента времени $t = 3$ с.
27. Закон движения материальной точки имеет вид: $X(t) = 25 + 10t + t^2$. Найти перемещение и пройденный путь за промежуток времени от $t_1 = 2$ с до $t_2 = 6$ с, а также среднюю путевую скорость и среднюю скорость перемещения.
28. Материальная точка движется по закону: $Y(t) = At^2 - Ct^4$, где $A = 5$ м/с², $C = 0,25$ м/с⁴. Найти скорость и ускорение точки в моменты време-

ни $t_1 = 1$ с и $t_2 = 3$ с. Каковы средние значения скорости и ускорения за этот промежуток времени?

29. Материальная точка движется по окружности радиусом $R = 4$ м. Закон ее движения описывается уравнением $S(t) = A + Bt^2$, где $A = 8$ м, $B = -2$ м/с², а S отсчитывается вдоль окружности. Найти момент времени, когда нормальное ускорение точки равно 9 м/с², а также скорость, тангенциальное и полное ускорения точки в этот момент времени.

30. Вращение колеса задается уравнением $\varphi(t) = A + Bt + Ct^3$, где $A = 3$ рад, $B = 2$ рад/с, $C = 1$ рад/с³. Радиус колеса равен 1 м. Для точки, лежащей на ободе колеса, найти через $t = 3$ с после начала движения угловую и линейную скорости, угловое, тангенциальное и нормальное ускорения.

31. Тело находится на наклонной плоскости. При каком максимальном угле наклона плоскости к горизонту тело еще не будет с нее соскальзывать? Коэффициент трения о плоскость μ .

32. Тело скользит с высоты h по наклонной плоскости, имеющей угол наклона α . За какое время оно соскользнет с плоскости? Трением пренебречь.

33. Тело, брошенное вертикально вверх со скоростью 10 м/с, поднимается на максимальную высоту 4 м. Определить силу сопротивления воздуха, считая ее постоянной, если масса тела 1 кг.

34. На брусок массой 5 кг, лежащий на столе, действует сила $F = 20$ Н, приложенная под углом 60° к горизонту. Определить ускорение бруска, если коэффициент трения $\mu = 0,1$.

35. С каким ускорением падает тело в воздухе, если сила сопротивления со стороны воздуха в 20 раз меньше силы тяжести?

36. На наклонной плоскости, имеющей угол наклона к горизонту $\alpha = 45^\circ$, лежит груз массой $2,6$ кг. Коэффициент трения $\mu = 0,5$. Какую минимальную

силу, направленную вдоль плоскости, надо приложить к грузу, чтобы вытащить его?

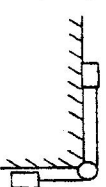
37. На наклонной плоскости, имеющей угол наклона к горизонту $\alpha = 45^\circ$, лежит груз массой $2,6$ кг. Коэффициент трения $\mu = 0,5$. Какую минимальную силу, направленную вдоль плоскости, надо приложить к грузу, чтобы удерживать его?

38. На наклонной плоскости, имеющей угол наклона к горизонту $\alpha = 30^\circ$, лежит груз массой $2,6$ кг. Коэффициент трения $\mu = 0,7$. Какую минимальную силу, направленную вдоль плоскости, надо приложить к грузу, чтобы вытащить его?

39. С каким ускорением движется тело массой 1 кг вверх вдоль наклонной плоскости под действием силы 10 Н, если угол между направлением действия силы и нормалью к плоскости 60° ? Угол наклона плоскости к горизонту 30° . Трением пренебречь.

40. С каким ускорением движется тело массой $0,2$ кг вверх вдоль наклонной плоскости под действием силы 10 Н, направленной горизонтально? Угол наклона плоскости к горизонту 45° . Трением пренебречь.

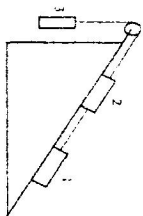
41. Два одинаковых груза массой 1 кг связаны нитью, перекинутой через блок (см. Рис.). Определить натяжение нити и коэффициент трения груза о плоскость стола, если ускорение груза равно $4,5$ м/с².



42. На шнуре, перекинутом через неподвижный блок, уравновешены два груза массами по 2 кг. С каким ускорением будут двигаться грузы, если на один из них положить перегрузок массой 70 г? Какова сила давления перегруза на груз? Какова сила натяжения шнура во время движения?

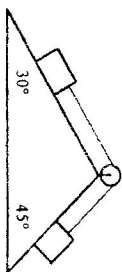
43. Три груза массами $m_1 = 100$ г, $m_2 = 200$ г и $m_3 = 300$ г

связаны легкой нитью, перекинутой через невесомый блок, установленный на наклонной плоскости (см. Рис.). Угол наклона плоскости к горизонту



равен 30° . Коэффициент трения между грузами и наклонной плоскостью равен $0,2$. Определить ускорение грузов и натяжение нити, связывающей грузы 1 и 2, находящиеся на наклонной плоскости.

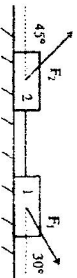
44. Через невесомый блок, укрепленный на ребре призмы, грани которой образуют углы 30° и 45° с горизонтом, перекинута нить (см. Рис.).



К концам невесомой нерастяжимой нити привязаны грузы массами по 1 кг каждый. Коэффициенты трения грузов о плоскость одинаковы и равны $0,1$. Определить ускорение грузов и силу натяжения нити.

45. Два бруска массами $m_1 = 1$ кг и $m_2 = 2$ кг, связанные нерастяжимой нитью, движутся по горизонтальной плоскости. К

ним приложены силы $F_1 = 8$ Н и $F_2 = 5$ Н (см. Рис.), составляющие с горизонтом углы 30° и



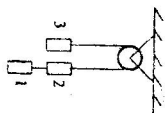
45° . Коэффициенты трения брусков о плоскость одинаковы и равны $0,1$. Система движется направо. Найти ускорение брусков и натяжение нити.

46. Двое саней массой по 20 кг каждое, связанные между собой веревкой, танут с силой 200 Н под углом 30° к горизонту. Найти ускорение саней и силу натяжения веревки, связывающей сани, если коэффициент трения по льду равен $0,025$.

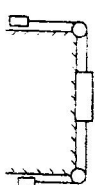


47. Через неподвижный блок перекинута нерастяжимая нить, к концам которой подвешены три одинаковых груза массой $m = 2$ кг каждый.

Найти ускорение системы и силу натяжения нити, связывающей грузы 1 и 2. Массой блока и трением в нем пренебречь.



48. На столе лежит деревянный брусок, к которому привязаны нити, перекинутые через блоки, укрепленные на opposite ends of the table. К свободным концам нити подвешены грузы массами $0,85$ кг и $0,2$ кг, вследствие чего брусок приходит в движение и за 3 с проходит расстояние $0,81$ м. Зная, что масса бруска 2 кг, определить коэффициент трения скольжения и силу натяжения нитей.

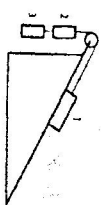


49. Два груза массами $m_1 = 100$ г и $m_2 = 200$ г связаны

легкой нитью, перекинутой через невесомый блок, установленный на наклонной плоскости (см. Рис.). Угол наклона плоскости к горизонту равен 30° . Коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью равен $0,2$. Определить ускорение грузов и натяжение нити.



50. Три груза массами $m_1 = 200$ г, $m_2 = 100$ г и $m_3 = 300$ г связаны легкой нитью, перекинутой через невесомый блок, установленный на наклонной плоскости (см. Рис.). Угол наклона плоскости к горизонту равен 45° . Коэффициент трения между 1 грузом и наклонной плоскостью равен $0,2$. Определить ускорение грузов и натяжение нити.



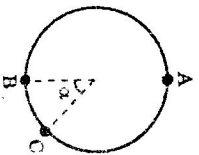
51. Автомобиль массой 1 т движется по мосту с постоянной скоростью 36 км/ч. С какой силой давит автомобиль на середину моста, если: а) мост выпуклый с радиусом кривизны $R = 50$ м? б) мост вогнутый с тем же радиусом кривизны? в) мост плоский?

52. Самолет делает петлю в вертикальной плоскости. Определить вес летчика в верхней и нижней точках петли, если радиус петли 200 м, масса летчика 80 кг, скорость самолета 360 км/ч.

53. Груз, привязанный к нити, описывает в горизонтальной плоскости окружность радиусом 40 см. Нить образует с вертикалью угол 30° . Определить скорость груза.

54. На горизонтальной вращающейся платформе на расстоянии $R = 0,8$ м от оси вращения лежит груз. При какой угловой скорости вращения платформы груз начнет соскальзывать с нее, если коэффициент трения между грузом и платформой $\mu = 0,1$?

55. Тело массой m движется по внутренней поверхности желоба в виде окружности радиуса R с постоянной скоростью v . Определить силу давления тела на желоб в точках А, В, С, считая угол α известным.



56. В известном аттракционе "автомобиль на вертикальной стене" автомобиль движется по внутренней поверхности цилиндра в горизонтальной плоскости. Каков должен быть коэффициент трения между шинами и поверхностью цилиндра $R = 5$ м, чтобы автомобиль не сползал вниз при скорости $v = 72$ км/ч?

57. С какой максимальной скоростью может ехать мотоцикл по горизонтальной поверхности, описывая дугу радиусом 100 м, если коэффициент трения резины о почву $\mu = 0,4$?

58. Шар массой $m = 200$ г, имеющий отверстие, может скользить по горизонтальному стержню, укрепленному на вертикальной оси. Шар соединен с осью пружиной, длина которой в нерастянутом состоянии $l_0 = 20$ см. Когда стержень вращается с угловой скоростью $\omega = 12$ рад/с, пружина растянута до длины $l = 40$ см. Определить жесткость пружины k . Трением пренебречь.

59. Какую скорость должен иметь искусственный спутник, чтобы он мог двигаться по круговой орбите вокруг Земли на высоте 2000 км? Каков период его обращения? Радиус Земли 6400 км, а ускорение свободного падения на ее поверхности $g = 9,8$ м/с².

60. Во сколько раз период обращения спутника, движущегося на расстоянии 1600 км от поверхности Земли, больше периода обращения спутника, движущегося на высоте 600 км от ее поверхности, если радиус Земли $R = 6400$ км?

61. Человек, стоящий на неподвижном плоту массой 500 кг, пошел со скоростью 5 м/с относительно плота. Масса человека 100 кг. С какой скоростью начал двигаться плот по поверхности воды?

62. Снаряд массой 50 кг, летящий под углом 30° к горизонту со скоростью 400 м/с, попадает в платформу с песком, движущуюся навстречу со скоростью 10 м/с, и застревает в ней. Найти скорость платформы после попадания снаряда, если ее масса 950 кг.

63. Снаряд, летевший со скоростью 400 м/с, разорвался на две части. Меньший осколок, масса которого составляет 40 % от массы снаряда, полетел в противоположном направлении со скоростью 150 м/с. Определить скорость большего осколка.

64. Снаряд, летящий в горизонтальном направлении со скоростью $v = 20$ м/с, разбивается на две части массами 10 кг и 5 кг. Скорость меньшего осколка равна 60 м/с и направлена вертикально вниз. Определить скорость и направление движения большего осколка.

65. Бильярдный шар 1, двигавшийся со скоростью $v = 10$ м/с, столкнулся с покоящимся шаром 2. После удара шары разлетелись под прямым углом. Определить скорости шаров после удара, если первый шар отклонился от первоначального направления на угол $\alpha = 30^\circ$.

66. Два неупругих тела, массы которых 2 кг и 6 кг, движутся навстречу друг другу со скоростями 2 м/с каждое. Определить величину и направление скорости тел после удара.

67. Снаряд массой 30 кг, который летел вертикально вверх, разорвался в верхней точке траектории на три осколка. Два осколка разлетелись под углом 120° друг к другу, причем скорость первого осколка массой 5 кг равна 90 м/с и направлена горизонтально, а скорость второго массой 15 кг равна 30 м/с и направлена вверх. Определить величину и направление скорости третьего осколка.

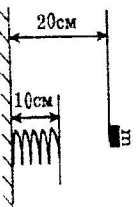
68. Шар массой $m_1 = 0,3$ кг, движась со скоростью 1 м/с, сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2 = 0,5$ кг. После удара шар m_1 движется со скоростью 0,5 м/с под углом в 60° к направлению первоначального движения. Определить величину и направление скорости движения второго шара после удара.

69. Граната, брошенная под углом 30° к горизонту со скоростью 10 м/с, в верхней точке траектории разорвалась на два одинаковых осколка. Один из них полетел вертикально вверх со скоростью 5 м/с. Определить величину и направление скорости второго осколка.

70. Охотник стреляет из ружья с движущейся лодки по направлению ее движения. Какую скорость имела лодка, если она остановилась после двух быстрых последующих друг за другом выстрелов? Масса охотника с лодкой 200 кг, масса заряда 20 г. Скорость вылета заряда 500 м/с.

71. Камень массой 1 кг падает с высоты 20 м и в момент падения на землю имеет скорость 18 м/с. Определить, работу силы сопротивления воздуха и величину этой силы, считая ее постоянной.

72. Тело массой 10 г падает с высоты 20 см на вертикально расположенную пружину, вызывая ее сжатие. Определить максимальное смещение верхней



го конца пружины, если начальная высота пружины 10 см, а ее жесткость 100 Н/м.

73. Из бесконечности на поверхность Земли падает метеорит массой $m = 30$ кг. Какая работа будет совершена при этом силами тяготения Земли? Считать известными ускорение свободного падения у поверхности Земли $g = 9,8$ м/с² и радиус Земли $R = 6400$ км.

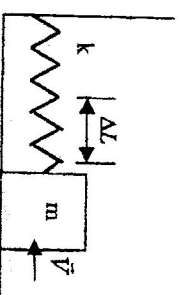
74. С поверхности Земли вертикально вверх пущена ракета со скоростью $v = 5$ км/с. На какую высоту она поднимется?

75. Пружина жесткостью $k = 500$ Н/м сжата силой $F = 100$ Н. Определить работу внешней силы, дополнительно сжимающей эту пружину на $\Delta l = 2$ см.

76. С ледяной горки с углом наклона β съезжают без начальной скорости санки. Нижнюю половину поверхности горки посыпали песком. Найти область значений коэффициента трения μ , при котором санки доседут до основания горки.

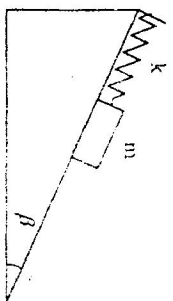
77. Телу, находящемуся у основания наклонной плоскости, сообщили скорость V , направленную вверх вдоль наклонной плоскости. На какую высоту поднимется тело? Коэффициент трения μ и угол наклона плоскости к горизонту β считать известными.

78. Кубик массой m налетает на невесомую пружину жесткости k , ось которой перпендикулярна грани кубика, параллельна его плоскости и проходит через центр масс кубика. В момент, когда кубик остановился, пружина оказалась сжатой на величину Δl . С какой скоростью в обратном направлении будет двигаться кубик в момент отрыва от пружины, если коэффициент трения кубика о плоскость μ ?



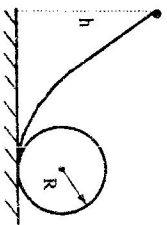
79. Тело массой $m = 1$ кг падает с начальной скоростью $V_0 = 14$ м/с с высоты $H = 24$ м и углубляется в песок на глубину $h = 0,2$ м. Найти силу сопротивления песка, считая ее постоянной. Сопротивлением воздуха пренебречь.

80. На наклонной плоскости лежит брусок, соединенный пружиной, закрепленной с неподвижной опорой. Из положения, когда пружина не деформирована, брусок без начальной скорости отпускают, и он начинает скользить вниз. Определить максимальное растяжение пружины. Масса бруска $m = 0,5$ кг, жесткость пружины $k = 120$ Н/м, угол наклона плоскости к горизонту $\beta = 45^\circ$, коэффициент трения бруска о плоскость $\mu = 0,5$.



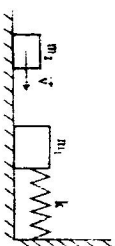
81. Какую минимальную скорость надо сообщить телу, висящему на невесомой нити длиной l , чтобы оно совершило полный оборот, не сходя с круговой траектории?

82. Матчик массой $0,1$ кг отклонили в горизонтальное положение и отпустили. Определить натяжение нити в момент, когда она составляет с вертикалью угол 60° .



83. Небольшое тело соскальзывает с высоты h по наклонному скату, переходящему в мертвую петлю радиуса R . Какова должна быть наименьшая высота h , чтобы тело сделало полную петлю не выскочив? Трением пренебречь.

84. На горизонтальном столе лежит тело массой m_1 , соединенное с пружиной жесткостью k . Второй конец пружины закреплен. В это тело попадает



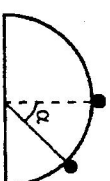
телом массой m_2 , движущимся со скоростью v .

Определить максимальную деформацию пружины, если удар неупругий. Трением пренебречь.

85. Определить скорость пули массой $m = 10$ г, если при выстреле в ящик с песком массой $M = 1$ кг, висящий на подвесе длиной $l = 1$ м, он отклонился от вертикального положения на 90° (пуля застревает в песке).

86. Небольшое тело соскальзывает с вершины полусферы.

При каком угле α тело оторвется от поверхности полусферы? Трением пренебречь.



87. Небольшое тело массой M лежит на вершине гладкой полусферы радиусом R . В тело попадает пуля массой m , летящая горизонтально, и застревает в нем. Пренебрегая смещением тела во время удара, определить при какой минимальной скорости пули тело сразу оторвется от поверхности полусферы? Трением пренебречь.

88. Два шарика одинаковой массы подвешены на параллельных нитях одинаковой длины так, что они соприкасаются. Первый шар отклоняют так, что его центр масс поднимается на высоту 5 см, и отпускают. На какую высоту поднимутся шары после соударения, если удар неупругий?

89. Шарик массой $m = 200$ г, подвешенный на нити, отклонили горизонтально и отпустили. В нижнем положении шарик сталкивается упруго с шайбой, лежащей на гладкой горизонтальной поверхности, и отскакивает, отклоняя нить на угол $\alpha = 60^\circ$. Определить массу шайбы.

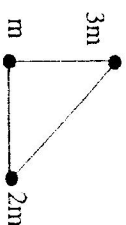
90. Из орудия, укрепленного на железнодорожной платформе, которая стоит на горизонтальном прямом пути, выстрелили горизонтально в направлении пути. Масса снаряда 5 кг, его начальная скорость 600 м/с. Масса платформы с орудием 2000 кг. Определить расстояние, на которое откатится платформа, если коэффициент трения равен $0,002$.

91. Определить положение центра масс равнобедренного треугольника, образованного однородными стержнями длиной l и массой m каждый.

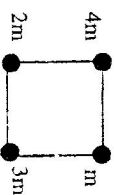
92. Определить положение центра масс равнобедренного прямоугольного треугольника, образованного однородными стержнями массой m каждый, если длина катетов L .

93. Определить положение центра масс системы трех материальных точек массами m , $2m$, $3m$, расположенных в вершинах равностороннего треугольника со стороной L .

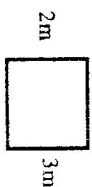
94. Определить положение центра масс системы трех материальных точек массами m , $2m$, $3m$, расположенных в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого равны L .



95. Определить положение центра масс системы четырех материальных точек массами m , $2m$, $3m$, $4m$ расположенных в вершинах квадрата со стороной L .



96. Определить положение центра масс квадрата, образованного однородными стержнями длиной L и массами m , $2m$, $3m$, $4m$.



97. Однородный диск радиуса R имеет круглый вырез, диаметр которого равен R . Определить положение центра масс заштрихованной части диска.



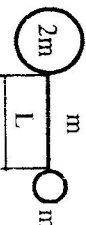
98. Однородный диск радиуса R имеет круглый вырез, диаметр которого равен $R/2$. Определить положение центра масс заштрихованной части диска.



99. Однородный диск радиуса R имеет круглый вырез, диаметр которого равен $R/2$. Определить положение центра масс заштрихованной части диска.



100. Определить положение центра масс системы, образованной однородным стержнем массой m и длиной L и двумя дисками: первый массой m и диаметром $L/4$,



второй массой $2m$ и диаметром $L/2$.

101. Три гармонических колебания одного направления, уравнение которых задается функцией $\cos()$, имеют циклическую частоту 2 рад/с и следующие параметры: 1) амплитуда 2 см и начальная фаза 0 , 2) амплитуда 1 см и начальная фаза $\pi/2$, 3) амплитуда 1 см и начальная фаза π . Записать уравнение результирующего колебания.

102. Четыре гармонических колебания одного направления, уравнение которых задается функцией $\cos()$, имеют период 2 с и следующие параметры: 1) амплитуда 3 см и начальная фаза 0 , 2) амплитуда 2 см и начальная фаза $\pi/2$, 3) амплитуда 1 см и начальная фаза π , 4) амплитуда 2 см и начальная фаза $-\pi/2$. Записать уравнение результирующего колебания.

103. Три гармонических колебания одного направления, уравнение которых задается функцией $\cos()$, имеют частоту 2 Гц и следующие параметры: 1) амплитуда 1 см и начальная фаза 0 , 2) амплитуда 1 см и начальная фаза $\frac{2}{3}\pi$, 3) амплитуда 2 см и начальная фаза $\frac{\pi}{3}$. Записать уравнение результирующего колебания.

104. Три гармонических колебания одного направления, уравнение которых задается функцией $\cos()$, имеют частоту 4 Гц и следующие параметры: 1) амплитуда 2 см и начальная фаза 0 , 2) амплитуда 2 см и начальная фаза $\frac{2}{3}\pi$, 3) амплитуда 1 см и начальная фаза $-\frac{2}{3}\pi$. Записать уравнение результирующего колебания.

105. Три гармонических колебания одного направления, уравнение которых задается функцией $\cos()$, имеют циклическую частоту 4 рад/с и следующие параметры: 1) амплитуда 1 см и начальная фаза 0, 2) амплитуда 1 см и начальная фаза $\pi/2$, 3) амплитуда 2 см и начальная фаза π . Записать уравнение результирующего колебания.
106. Складываются два колебания одинакового направления и одинакового периода: $x_1 = A_1 \sin \omega t$ и $x_2 = A_2 \sin \omega(t + \tau)$, где $A_1 = A_2 = 3$ см, $T = 2$ с, $\tau = 0.5$ с. Определите амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Напишите его уравнение. Постройте векторную диаграмму для момента времени $t=0$.
107. Складываются два колебания одинакового направления: $x_1 = A_1 \sin \omega_1 t$ и $x_2 = A_2 \cos \omega_2 t$, где $A_1 = \sqrt{3}$ см, $A_2 = 1$ см, $\omega_1 = \omega_2 = 2$ рад/с. Определите амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Напишите его уравнение. Постройте векторную диаграмму для момента времени $t=0$.
108. Складываются три колебания одинакового направления и одинаковой частоты, описываемые функцией синуса, имеющие $A_1 = 3$ см, $A_2 = 4$ см, $A_3 = 3$ см, $\omega = 2$ рад/с, начальные фазы $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = \pi/2$, $\varphi_3 = -\pi/2$. Определите амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Напишите его уравнение. Постройте векторную диаграмму для момента времени $t=0$.
109. Складываются четыре колебания одинакового направления и одинаковой частоты, описываемые функцией косинуса, имеющие $A_1 = 3$ см, $A_2 = 3$ см, $A_3 = 3$ см, $A_4 = 3$ см, $\nu = 4$ Гц. Начальная фаза первого колебания $\varphi_1 = \pi/4$. Каждая последующая начальная фаза больше предыдущей на $\pi/2$. Определите амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Напишите его уравнение. Постройте векторную диаграмму для момента времени $t=0$.
110. Складываются четыре колебания одинакового направления и одинаковой частоты, описываемые функцией косинуса, имеющие $A_1 = 9$ см, $A_2 = 3$ см, $A_3 = 6$ см, $A_4 = 3$ см, $\nu = 0.5$ Гц. Начальная фаза первого колебания $\varphi_1 = \pi/4$. Каждая

последующая начальная фаза больше предыдущей на $\pi/2$. Определите амплитуду и начальную фазу результирующего колебания. Напишите его уравнение. Постройте векторную диаграмму для момента времени $t=0$.

Физические постоянные

Физическая постоянная	Обозначение	Числовое значение
Радиус Земли	R	$6,37 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	M	$5,97 \cdot 10^{24}$ кг
Гравитационная постоянная	G	$6,67 \cdot 10^{-11}$ м ³ /кг·с ²