

Лабораторная работа № 101

Проведение и обработка прямых и косвенных измерений

Принадлежности: штангенциркуль, микрометр, измеряемые тела.

Краткая теория

1. Основные понятия

В реальных условиях все измерения имеют погрешности, которые можно разделить на две группы: систематические и случайные.

Систематические погрешности возникают, в основном, из-за ограниченной точности измерительных приборов, а также вследствие закономерных воздействий на процесс измерений. К закономерному искажению экспериментальных результатов приведет, например, наличие массивного металлического тела недалеко от места проведения измерений с помощью компаса; влияние параллакса на считывание результатов измерений со шкалы

Случайные погрешности появляются вследствие случайного характера самой измеряемой величины и из-за незакономерных воздействий, искажающих результаты измерений. Примерами незакономерных воздействий на процесс измерений могут служить вибрации деталей лабораторных установок, невнимательность при снятии показаний и так далее. Со случайным характером измеряемой величины мы встретимся, например, с достаточно высокой точностью измеряя температуру воздуха в лаборатории, так как температура воздуха испытывает небольшие колебания даже при постоянных условиях.

Случайные погрешности приводят к получению разных результатов при повторных измерениях, проведенных в одинаковых условиях. При этом характерно примерно симметричное распределение данных около среднего значения измеряемой величины.

Измерения физических величин делятся на прямые и косвенные.

При прямых измерениях значение величины определяют *непосредственно с помощью прибора* (например, длину ребра куба с помощью линейки).

При косвенных измерениях искомую величину *рассчитывают по формуле, в которую входят результаты прямых измерений* и заданные значения вспомогательных величин и констант. Примером косвенных измерений может служить определение объема куба путем возведения в кубическую степень длины его ребра, измеренной с помощью линейки.

Абсолютная и относительная погрешности

Из-за наличия погрешностей результаты измерений (как прямых, так и косвенных) всегда отличаются от истинного значения измеряемой величины. В качестве одной из характеристик серии измерений обычно используют среднее арифметическое значение

$$\bar{x}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (1)$$

где x_i — результат $i^{\text{го}}$ измерения, а N — количество проведенных измерений.

Абсолютная погрешность ε показывает — **на сколько** среднее значение (1), рассчитанное по данным конкретной серии измерений, отличается от истинного значения (измеряется в тех же единицах, что и сама измеряемая величина).

Предназначение **относительной погрешности** показать — **на сколько процентов** мы ошиблись при проведении измерений. Поэтому за 100% следовало бы принять истинное значение измеряемой величины. Но истинное значение всегда неизвестно. Поэтому за 100% обычно принимают известную величину, которая наиболее близка к истинному значению: среднее арифметическое в серии (1). Таким образом, **относительная погрешность находится по формуле**

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\bar{x}} \times 100\%. \quad (2)$$

Методы оценки абсолютной погрешности ε обсуждаются ниже.

Систематическая погрешность при прямых измерениях

В качестве систематической погрешности прямых измерений $\varepsilon_{\text{сист}}$ будем рассматривать систематическую погрешность прибора. **Для приборов со шкалой** (кроме электроизмерительных) — линейек, штангенциркулей, секундометров, оптических измерительных приборов и т.п., **систематическая погрешность $\varepsilon_{\text{сист}}$ равна наименьшему делению шкалы прибора. Для цифровых приборов $\varepsilon_{\text{сист}}$ совпадает с единицей наименьшего учитываемого разряда по индикатору прибора.** При отсутствии случайной погрешности (нет разброса значений в серии измерений) $\varepsilon_{\text{сист}}$ ограничивает сверху разность между измеренным и истинным значениями, а значит, является **абсолютной погрешностью ε** .

Если значение физической величины не определяется путем измерений, а задано, то за систематическую погрешность примем погрешность округления, то есть половину единицы последнего заданного десятичного знака. Например, если дано, что $g = 9,8 \text{ м/с}^2$, то $\varepsilon_{\text{сист}} = 0,05 \text{ м/с}^2$; если же $g = 9,81 \text{ м/с}^2$, то $\varepsilon_{\text{сист}} = 0,005 \text{ м/с}^2$.

Вероятность случайного события

При рассмотрении случайных погрешностей нужно знать, что такое вероятность. **Вероятностью случайного события называют долю опытов, которая приводит к желаемому результату**, если общее число опытов является достаточно большим (строго говоря, стремится к бесконечности). Другими словами, если при общем достаточно большом числе опытов N интересующее нас событие наблюдалось в N_1 случаях, то вероятность этого события

$$P \approx \frac{N_1}{N}.$$

Предположим, мы бросаем монету и нас интересует выпадение «решки». Если монету бросить 10 раз, то «решка» в принципе может выпасть любое ко-

личество раз от 1 до 10. Если же монету бросить тысячу раз, то число выпадений «решки» будет близко к пятистам, то есть отношение N_1/N будет мало отличаться от 0,5. И чем больше N — тем ближе отношение N_1/N к 0,5. Именно это и означает, что вероятность выпадения «решки» равна 0,5.

Случайная погрешность, доверительный интервал

Как уже отмечалось ранее, случайная погрешность приводит к тому, что результаты измерений физической величины, проведенных при одинаковых условиях, оказываются разными. Более того, средние арифметические значения, рассчитанные по данным разных серий, также не совпадают друг с другом. Понятно, что чем длиннее серия, тем более достоверную информацию об измеряемой физической величине мы получаем. Поэтому под **истинным значением физической величины** при этих условиях **понимают предел, к которому стремится среднее арифметическое значение (1) при стремлении числа опытов в серии N к бесконечности**. Понятно, что в принципе невозможно провести столь длинную серию измерений, которая гарантировала бы совпадение среднего арифметического с истинным значением измеряемой величины. Поэтому цель экспериментатора оценить — **на сколько среднее арифметическое, рассчитанное по результатам конкретной серии измерений, отличается от истинного значения**. Делается это путем расчета **доверительного интервала**, которым называется **интервал, с заданной вероятностью содержащий истинное значение**.

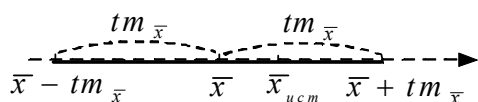


Рис. 1.

Приведем алгоритм расчета доверительного интервала по разработанному в математической статистике методу Стьюдента:

1. Для проведенной серии из N измерений по формуле (1) рассчитывается среднее арифметическое значение $\bar{x}_N$.

2. Вычисляется среднее квадратичное отклонение среднего арифметического

$$m_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x}_N)^2}{N(N-1)}}. \quad (3)$$

3. Задается **вероятность β** , с которой истинное значение попадет в рассчитываемый доверительный интервал (**β называют коэффициентом надежности**).
4. По таблице 1 находится коэффициент Стьюдента $t = f(N, \beta)$, который зависит от количества измерений N в проведенной серии и от заданного значения коэффициента надежности β .
5. Рассчитывается полуширина доверительного интервала $t \cdot m_{\bar{x}}$, которая в обе стороны откладывается от среднего арифметического значения (на рис.1 доверительный интервал выделен жирной линией).

Коэффициент надежности β имеет следующий смысл: если провести K **однотипных серий** измерений и для каждой из них рассчитать доверительный интервал с одним и тем же значением β , то при достаточно большом значении K **примерно $\beta \cdot K$ доверительных интервалов будет содержать истинное значение**. Например, если серий 1000, а коэффициент надежности равен 0,98, то число доверительных интервалов, содержащих истинное значение, будет близко к 980.

При заданной надежности β полуширина доверительного интервала ограничивает сверху абсолютное значение разности среднего и истинного значений (рис. 1). Поэтому **абсолютная случайная погрешность — это полуширина доверительного интервала**:

$$\varepsilon_{\text{случ}} = t \cdot m_{\bar{x}}. \quad (4)$$

Если число опытов в серии $N \geq 30$, то при коэффициенте надежности $\beta = 0,68$ коэффициент Стьюдента $t \approx 1$, то есть $\varepsilon_{\text{случ}} \approx m_{\bar{x}}$.

Таблица 1. Коэффициент Стьюдента находится на пересечении строки с заданным значением N и столбца с заданной величиной β

$\beta \backslash N$	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
3	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
4	2,35	3,18	4,54	5,84	12,94
5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	2,02	2,57	3,37	4,03	6,86
7	1,94	2,45	3,14	3,71	5,97
10	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
20	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88

2. Методика обработки результатов прямых измерений

1. Установить систематическую погрешность измерительного прибора $\varepsilon_{\text{сист}}$ и записать ее.
2. Провести серию измерений. Если все показания прибора совпадают между собой, то случайной погрешности нет, и результат измерений следует представить в виде

$$x = x_{\text{пр}} \pm \varepsilon,$$

где $x_{\text{пр}}$ — показание прибора. а $\varepsilon = \varepsilon_{\text{сист}}$ — **абсолютная погрешность**.

3. Если не все результаты измерений совпадают между собой, то нужно рассчитать случайную погрешность, последовательно применяя формулы (1), (3) и (4). Используемое при этом значение коэффициента Стью-

дента (таблица 1) должно соответствовать количеству измерений N в серии и выбранному значению коэффициента надежности, которое обычно превышает или равняется 0,95. Результат измерений следует представить в виде

$$x = \bar{x} \pm \varepsilon, \quad (5)$$

где

$$\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_{\text{сист}}^2 + \varepsilon_{\text{случ}}^2} \quad (6)$$

— **абсолютная погрешность** измерения величины x .

Если какая-либо из погрешностей ($\varepsilon_{\text{сист}}$ или $\varepsilon_{\text{случ}}$) превосходит другую более чем в два раза, то под квадратным корнем (6) следует оставить только большую из них. Тогда абсолютная погрешность ε будет равняться большей из $\varepsilon_{\text{сист}}$ и $\varepsilon_{\text{случ}}$.

Отметим, что запись (5) означает, что истинное значение измеряемой величины с выбранной вероятностью β попадает в интервал с верхней границей $\bar{x} + \varepsilon$ и нижней границей $\bar{x} - \varepsilon$.

3. Методика обработки результатов косвенных измерений

Пусть физическая величина Z является функцией аргументов $x_1, x_2, \dots, x_N$, то есть $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

1. Следует провести серии измерений каждой из величин $x_1, x_2, \dots, x_N$, а затем рассчитать их средние арифметические значения $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N$ (1) и средние квадратичные отклонения средних $m_{\bar{x}_1}, m_{\bar{x}_2}, \dots, m_{\bar{x}_N}$ (3).
2. Середина доверительного интервала для величины Z находится подстановкой средних значений аргументов в функциональную зависимость $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$:

$$\bar{Z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N). \quad (7)$$

3. Среднее квадратичное отклонение среднего значения величины Z будем находить по формуле

$$m_{\bar{Z}} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_0^2 m_{\bar{x}_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_0^2 m_{\bar{x}_2}^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_N}\right)_0^2 m_{\bar{x}_N}^2}, \quad (8)$$

в которой $m_{\bar{x}_j}$ — средние квадратичные отклонения (3) средних значений $\bar{x}_j$ непосредственно измеряемых величин x_j , а $\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)_0$ — частные производные функции $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$ по аргументам x_j , вычисленные в точке $\bar{Z} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N)$.

4. Результат представим в виде доверительного интервала, имеющего коэффициент надежности 0,68

$$Z = \bar{Z} \pm m_{\bar{Z}}. \quad (9)$$

5. Согласно (9) **абсолютная погрешность** измерения величины Z равна $m_{\bar{Z}}$, то есть **относительную погрешность** следует находить по формуле

$$\eta = \frac{m_{\bar{Z}}}{\bar{Z}} \times 100\%. \quad (10)$$

Часто математическое выражение для $m_{\bar{Z}} / \bar{Z}$ имеет более компактный вид, чем для $m_{\bar{Z}}$. В этом случае, вычислив частные производные, находят конкретный вид функции

$$\frac{m_{\bar{Z}}}{\bar{Z}} = \sqrt{\frac{1}{\bar{Z}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)_0^2 m_{x_1}^2 + \dots + \frac{1}{\bar{Z}^2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_N} \right)_0^2 m_{x_N}^2}, \quad (11)$$

а уже затем, зная $\bar{Z}$, вычисляют $m_{\bar{Z}}$. Этот прием будет использован при обработке результатов данной лабораторной работы.

Отметим, что представленный здесь метод обработки результатов косвенных измерений обоснован в случае преобладания случайных погрешностей, если при этом непосредственно измеряемые величины $x_1, x_2, \dots, x_N$ находятся в сериях из достаточно большого количества опытов. Для таких серий $m_{\bar{x}_j}$ — это абсолютные погрешности измерения величин x_j , поскольку при используемом значении коэффициента надежности ($\beta = 0,68$) истинные значения этих величин принадлежат доверительным интервалам $x_j = \bar{x}_j \pm m_{\bar{x}_j}$.

В силу недостатка времени мы будем применять рассмотренный здесь метод оценки погрешностей косвенных измерений и при сравнительно небольшом количестве опытов.

Инструменты для измерения размеров

Для измерения длины, высоты и других линейных размеров тел применяют масштабные линейки, рулетки, а для точных измерений — штангенциркуль, микрометр и оптические приборы для линейных измерений (например, катетометр). В данной работе используют штангенциркуль и микрометр.

Штангенциркуль (рис. 2) применяют для измерения длин при нахождении наружных и внутренних размеров тел. Он представляет собой линейку 1, по которой передвигается подвижная каретка, снабженная вспомогательной шкалой (нониусом 2). Линейка и каретка обладают губками, между которыми помещают измеряемое тело. Для измерения внутренних и внешних размеров используют разные пары губок. На рис. 2 сверху находятся губки, предназначенные для измерения внешних размеров, а внизу — для измерения внутренних размеров. Губки сдвигают до соприкосновения с поверхностью тела: сильный

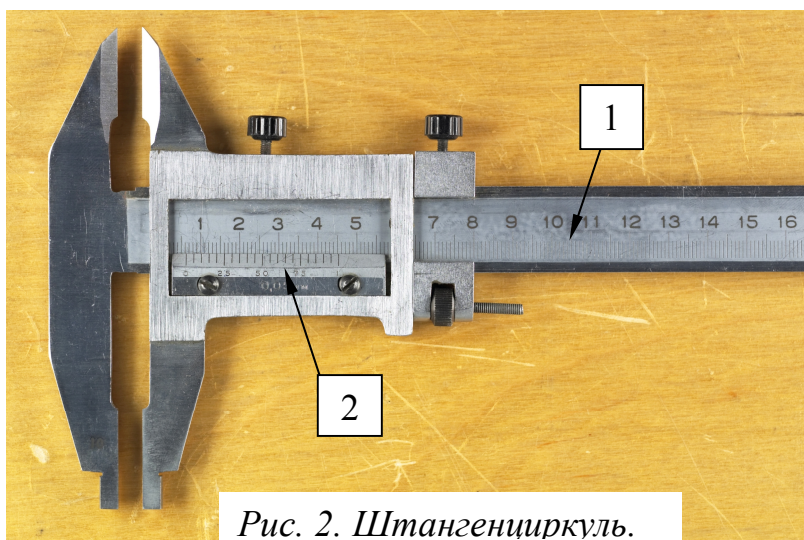


Рис. 2. Штангенциркуль.

нажим недопустим, так как может привести к деформациям измеряемого тела и губок штангенциркуля.

Нониус служит для увеличения точности измерений. Его использование позволяет измерить десятые, а иногда и несколько сотых долей миллиметра. Нониусы изготавливают с величиной отсчета 0,1; 0,05 и

0,02 мм. Цену деления нониуса можно определить, разделив 1 мм на число делений шкалы нониуса N . Так, нониус с числом делений $N=20$ дает отсчет с точностью $1/20 = 0,05$ мм (именно такой нониус показан на рис. 2 и 3). При цене деления 0,05 мм на шкале нониуса отмечают ряд цифр: 25, 50, 75, что означает 0,25, 0,50 и 0,75 мм.

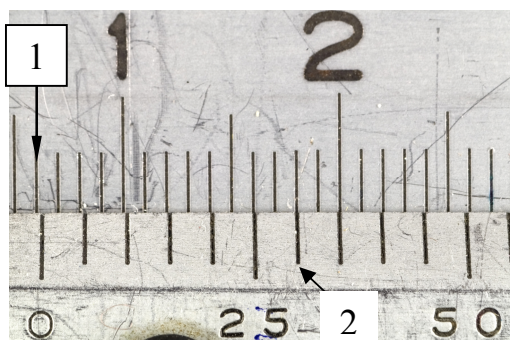


Рис. 3. Шкалы штангенциркуля крупным планом: линейка (вверху), нониус (внизу).

Порядок отсчета по шкалам штангенциркуля таков:

1. Целое число миллиметров определяют по делению миллиметровой шкалы линейки, расположенному слева от нулевого деления шкалы нониуса. На рис. 2 и 3 этот отсчет равен 6 мм (на рис. 3. он отмечен стрелкой с цифрой 1).

2. Находят место совпадения штрихов шкал нониуса и линейки и прочитывают отсчет по нониусу, соответствующий совпадающему штриху. На рис. 3 совпадающий штрих отмечен стрелкой с цифрой 2, а соот-

ветствующий отсчет равен 0,30 мм.

Таким образом, результирующий отсчет (рис. 3) составляет 6,30 мм.

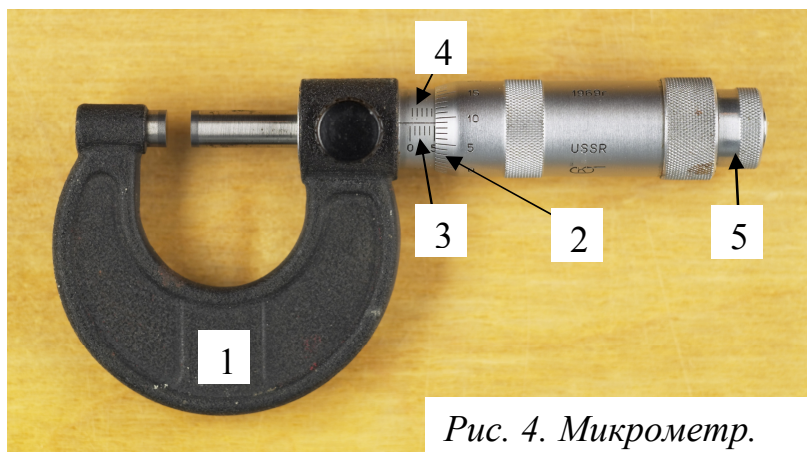


Рис. 4. Микрометр.

ветствующие деления 2. На цилиндрической части корпуса прибора нанесены две миллиметровые шкалы: **основная** (нижняя 3), имеющая ноль, и **вспомогатель-**

Микрометр (рис. 4) применяют для измерений длины с точностью до 0,01 мм. Относительно неподвижного подковообразного корпуса 1 прибора перемещается винт с микрометрической резьбой, имеющей шаг 0,5 мм. Винт соединен с барабаном, на конической части которого нанесены уг-

ная (верхняя 4), сдвинутая относительно основной на 0,5 мм. Измеряемое тело помещают между неподвижным выступом слева на корпусе и подвижным стержнем, соединенным с микрометрическим винтом. Чтобы избежать чрез-

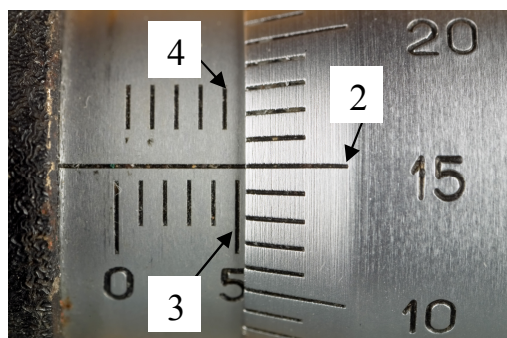


Рис. 5. Шкалы микрометра крупным планом. Обозначения соответствуют рис. 4.

мерных усилий при измерениях, барабан следует вращать только за головку 5 "трещотки". Вращение следует прекращать сразу после появления треска.

Отсчет целого числа миллиметров производят по делению **основной** (нижней) миллиметровой шкалы ближайшему к краю конуса барабана. На рис. 5 и 6 это деление помечено цифрой 3, а соответствующий ему отсчет составляет 5 мм.

Затем на **вспомогательной** (верхней) шкале также находят деление ближайшее к

краю конуса барабана. Это деление будем называть **вспомогательным** (на рис. 5 и 6 оно помечено стрелкой с цифрой 4). Если как на рис. 5 **вспомогательное** деление (4) расположено **левее** ближайшего к краю барабана деления основной шкалы (3), то отсчет по вспомогательной шкале не производится. В этом случае к целому числу миллиметров, отсчитанному по основной шкале, остается добавить только число сотых долей миллиметра (2), отсчитанное по шкале барабана напротив осевой линии основной шкалы. На рис. 5 целое число миллиметров составляет 5, а на барабане прочитана цифра 15, то есть общий отсчет составляет 5,15 мм.

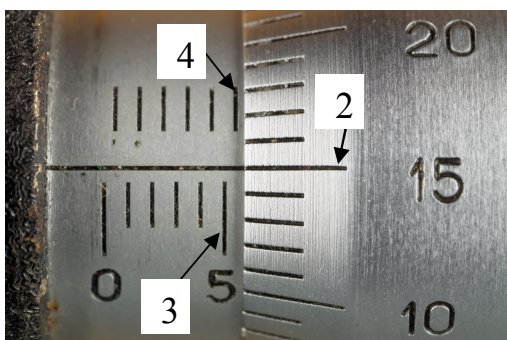


Рис. 6. Шкалы микрометра крупным планом. Обозначения соответствуют рис. 4.

Если как на рис. 6 **вспомогательное** деление (4) расположено **правее** ближайшего к краю барабана деления основной шкалы (3), то к отсчетам, сделанным по основной шкале и по шкале барабана, необходимо прибавить 0,5 мм. На рис. 6 отсчет по основной шкале составляет 5 мм, а на барабане — цифра 15. Поэтому общий отсчет — $5 + 0,5 + 0,15 = 5,65$ мм.

Перед началом измерений надо проверить установку микрометра на ноль. Для этого следует довести губки микрометра до соприкосновения между собой (до первых щелчков трещотки 5). Если на шкале барабана при этом нет нуля против горизонтальной линии — следует обратиться к лаборанту.

Порядок выполнения работы

а. Прямые измерения

Измеряемым телом является кольцо. Непосредственными прямыми измерениями будем определять внешний диаметр d и высоту a кольца. Случайная

погрешность здесь обусловлена погрешностью изготовления. Поэтому один и тот же параметр нужно измерять в разных местах кольца. Последовательность измерений и их обработки такова:

1. Провести семь измерений внешнего диаметра кольца и семь измерений высоты сначала штангенциркулем, а затем микрометром (всего четыре серии). Результаты измерений занести в таблицы 2. Таблица 2 для высоты a представлена ниже. Таковую же таблицу нужно подготовить для d .
2. Занести в таблицы систематические погрешности штангенциркуля и микрометра (указаны на приборах).
3. Для каждой из четырех проведенных серий измерений рассчитать средние значения (1), средние квадратичные отклонения средних значений (3), случайные погрешности (4) с коэффициентом надежности $\beta = 0,95$, абсолютные погрешности ε (6) и относительные погрешности η (2). Результаты занести в таблицы 2.

Таблица 2

№	Штангенциркуль								Микрометр							
	Высота a								Высота a							
	a_i	$\bar{a}$	$(a_i - \bar{a})^2$	$m_{\bar{a}}$	$\varepsilon_{\text{сист}}$	$\varepsilon_{\text{случ}}$	ε	η	a_i	$\bar{a}$	$(a_i - \bar{a})^2$	$m_{\bar{a}}$	$\varepsilon_{\text{сист}}$	$\varepsilon_{\text{случ}}$	ε	η
	мм	мм	мм ²	мм	мм	мм	мм	%	мм	мм	мм ²	мм	мм	мм	мм	%
1																
...																
7																

Для высоты и диаметра результаты измерений каждым прибором (четыре случая) представить в виде: $x = \bar{x} \pm \varepsilon$, где $\bar{x}$ — среднее значение, а ε — абсолютная погрешность.

Замечание: При записи доверительного интервала в численном значении абсолютной погрешности следует оставлять одну или две значащие цифры, а у среднего значения точность представления не должна быть выше, чем у абсолютной погрешности. Пусть, например, в результате расчета на калькуляторе получено, что $\bar{x} = 30,14256... \text{ мм}$, $\varepsilon = 0,06278... \text{ мм}$, а измерения проводились с помощью микрометра. Поскольку использованный прибор не измеряет тысячные доли миллиметра, то численное значение ε следует округлить до сотых, то есть принять, что $\varepsilon = 0,06 \text{ мм}$. Ну а раз погрешность не содержит тысячных долей миллиметра, то и среднее значение не должно их содержать. Поэтому результат измерений следует представить в виде $x = (30,14 \pm 0,06) \text{ мм}$.

6. Косвенные измерения

В этом разделе находятся площадь поперечного сечения и объем цилиндра, образованного внешней поверхностью кольца. Площадь и объем вычисля-

ются по формулам $S = \pi d^2/4$ и $V = aS = \pi ad^2/4$ с использованием результатов прямых измерений высоты a и диаметра d . Приведем алгоритм обработки:

1. Используя средние значения диаметра и высоты, рассчитать средние значения площади $\bar{S} = \frac{\pi \bar{d}^2}{4}$ и объема $\bar{V} = \frac{\pi \bar{d}^2 \bar{a}}{4}$.
2. Средние квадратичные отклонения средней площади $m_{\bar{S}}$ и среднего объема $m_{\bar{V}}$ найти с помощью формул

$$m_{\bar{S}} = \bar{S} \cdot \frac{2m_{\bar{d}}}{\bar{d}} \quad \text{и} \quad m_{\bar{V}} = \bar{V} \cdot \sqrt{\left(\frac{2m_{\bar{d}}}{\bar{d}}\right)^2 + \left(\frac{m_{\bar{a}}}{\bar{a}}\right)^2}, \quad (12)$$

которые следуют из (11) после вычисления частных производных.

3. Для площади и объема средние значения ($\bar{S}$ и $\bar{V}$), абсолютные ($m_{\bar{S}}$ и $m_{\bar{V}}$) и относительные (10) погрешности занести в таблицу 3 отдельно для штангенциркуля и отдельно для микрометра.
4. Результаты представить в виде $S = \bar{S} \pm m_{\bar{S}}$ и $V = \bar{V} \pm m_{\bar{V}}$ (две пары выражений).

Таблица 3

Площадь сечения, S				Объем цилиндра, V				
$\bar{d}$	$\bar{S}$	$m_{\bar{S}}$	η_s	$\bar{a}$	$\bar{d}$	$\bar{V}$	$m_{\bar{V}}$	η_v
мм	мм ²	мм ²	%	мм	мм	мм ³	мм ³	%

Контрольные вопросы

1. Как определяется систематическая погрешность при прямых измерениях?
2. Что такое доверительный интервал, коэффициент надежности?
3. Предположим, результаты одной и той же серии измерений обрабатываются с использованием разных значений коэффициента надежности β . Как и почему будет изменяться доверительный интервал при увеличении β ?
4. Что такое абсолютная погрешность?
5. Каким образом можно уменьшить абсолютную случайную погрешность?
6. Как рассчитать абсолютную погрешность прямых измерений при наличии систематической и случайной погрешностей?
7. Что такое относительная погрешность?
8. Что такое косвенные измерения? Как найти их абсолютную погрешность?
9. Покажите как путем преобразований из формулы (11) получаются формулы (12).