

чие: чем оно больше, тем больше ощущается выступание цвета. По данным эксперимента Герхарда Цойгнера, [7] наилучшее цветовое различие дает желтый цвет на черном фоне, что соответствует данным как эксперимента Иоханнеса Иттена (табл.), так и проведенного нами. Такой вывод позволяет сделать оценка выступления черного цвета на белом фоне (15 человек из 20-ти испытуемых отметили черный цвет как сильно выступающий, а 12 из них – как самый выступающий цвет на белом фоне), а также оценка выступления белого и желтого цветов на черном фоне (17 человек из 20-ти отметили желтый цвет как сильно выступающий, 18 из 20 — белый). Именно с целью выявить данную закономерность в оценку были включены черный и белый цвета фигур.

2. Результаты эксперимента в полной мере могут быть использованы при проектировании оформления тематических карт для передачи многоплановости изображения.

3. Данных, полученных в результате проведенного опыта, недостаточно для проекти-

рования гипсометрических шкал, в которых практически не используются исключительно чистые спектральные цвета, поэтому необходимо продолжить эксперимент по изучению цветовой пластики для оформления карт на примере многоступенных шкал.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Хартридж Г. Современные успехи физиологии зрения: пер. с англ. Изд-во иностранной литературы, 1952. –328 с.
2. Иттен И. Искусство цвета. –М.: Д. Аронов, 2004. –96 с.
3. Скворцов П.А. Цветовое оформление рельефа на картах. Учебное пособие. – М.: МИИГАиК, 1976. –71 с.
4. Зайцев А.С. Наука о цвете и живопись. –М.: Искусство, 1986. –158 с.
5. Колдаев П.К. Пластическое изображение рельефа на картах. –М.: Изд-во геодезической литературы, 1956. –134 с.
6. Беляева-Экземплярская С.Н. Об иллюзии выступающих вперед цветов. // Психология, неврология, психиатрия, 1924, прил. к IV тому.
7. Цойгнер Г. Учение о цвете. –М.: Изд-во литературы по строительству, 1971. –160 с.

Поступила 19 мая 2011 г.
Рекомендована кафедрой оформления
и издания карт МИИГАиК

КАРТОГРАФИРОВАНИЕ АСТЕРОИДА 433 ЭРОС В РАВНОПРОМЕЖУТОЧНЫХ ВДОЛЬ МЕРИДИАНОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ И АЗИМУТАЛЬНОЙ ПРОЕКЦИЯХ ТРЕХСОСНОГО ЭЛЛИПСОИДА

Доцент, кандидат техн. наук **М.В. Нырцов**¹,
ст. научный сотрудник, кандидат техн. наук **М.Э. Флейс**²,
научный сотрудник **М. М. Борисов**²

¹Московский государственный университет геодезии и картографии

²Институт географии РАН

E-mail: nyrtsovmaxim@gmail.com; E-mail: maria@geocnt.geonet.ru

Аннотация. Рассматриваются равнопромежуточные вдоль меридианов цилиндрическая и азимутальная проекции трёхосного эллипсоида для картографирования небесных тел с любым значением эксцентриситета, получаемые с помощью вычислений эллиптического интеграла. Этот способ вычислений обладает более высокой точностью по сравнению с ранее существовавшими.

Ключевые слова: астероид, трёхосный эллипсоид, картографическая проекция, планетоцентрическая широта

Abstract. The equidistant along meridians cylindrical and azimuthal projections of triaxial ellipsoid for mapping of celestial bodies with any value of eccentricity are described. They are obtained by calculation of elliptical integral. It gives more accuracy than earlier techniques.

Keywords: asteroid, triaxial ellipsoid, cartographical projection, planetocentric latitude

В настоящее время космические агентства всего мира – Федеральное космическое агентство (Роскосмос), Европейское космическое агентство (ЕКА), Национальное управление США по аэронавтике и исследованию косми-

ческого пространства (НАСА) установили в качестве приоритетного — направление исследований малых небесных тел (МНТ).

Кометы и астероиды представляют большой практический интерес благодаря их хими-

ческому составу, так как он не изменился со дня основания Солнечной системы. Важнейшими научными задачами в комплексе исследований МНТ являются определение их формы, размеров и картографирование их поверхностей. В [1] было установлено, что фигуры тел, у которых разница в осях оставляют более 10%, следует считать отличными от сферы, поэтому для их картографирования необходимо применять другие референц-поверхности.

30 мая 1971 г. была запущена американская автоматическая межпланетная станция «Маринер-9», основной целью которой было изучение поверхности Марса. Кроме Марса, «Маринер-9» исследовал два его естественных спутника — Фобос и Деймос. Фобос стал первым, отличающимся в своей фигуре от сферы, малым телом, на которое были получены космические изображения. Его размеры определяются осями $a=27$ км, $b=21$ км, $c=19$ км трёхосного эллипсоида [1].

В 1988 г. профессор Л.М. Бугаевский разработал специально для картографирования Фобоса нормальную равноугольную цилиндрическую проекцию трёхосного эллипсоида.

В Московском институте инженеров геодезии, аэрофотосъёмки и картографии (МИИГАиК) при участии Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова в этой проекции была создана карта поверхности Фобоса (рис. 1). В основу содержания легла карта П. Томаса и опубликованные материалы съёмки с космических аппаратов «Маринер-9» и «Викинг-1», а также модель Р. Тёрнера.

Помимо равноугольной цилиндрической проекции трёхосного эллипсоида, профессор Л.М. Бугаевский разработал равнопромежуточную вдоль меридианов цилиндрическую проекцию трёхосного эллипсоида, формулы которой были опубликованы в [3].

Вычисления координат проекции складываются из следующих этапов:

1) условие сохранения равнопромежуточности записывается в виде

$$m = \frac{x_{\xi}}{\Phi} = 1; \quad (1)$$

2) изометрическая широта вычисляется по формулам

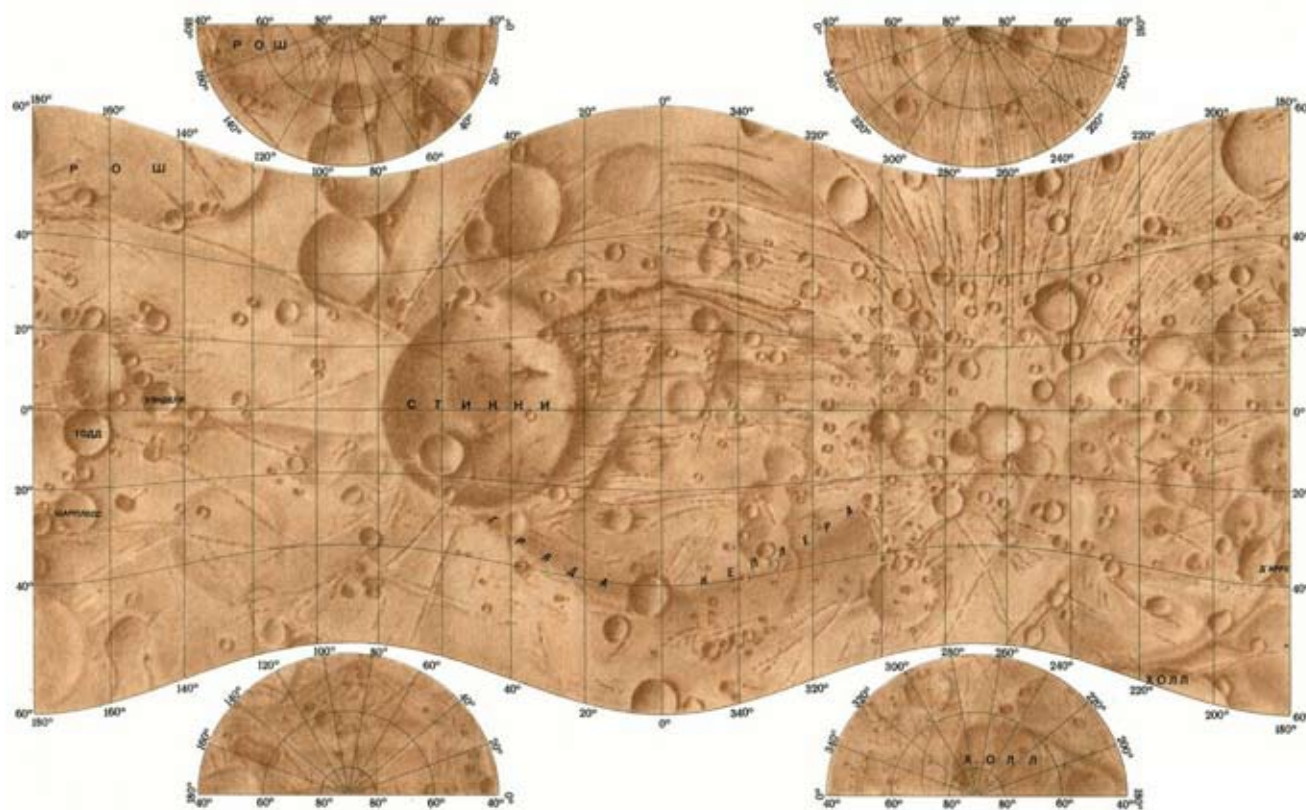


Рис. 1. Карта поверхности Фобоса (проекция Л. М. Бугаевского, 1998) [2]

$$d\xi = \frac{M}{r} dB(1+z^2 \cos^2 B)^{\frac{1}{2}}; \quad (2)$$

$$\Phi^2 = r^2(1+z^2 \cos^2 B), \quad (3)$$

где M — кривизна меридианного сечения,

$$M = \frac{d_{эл}(1-p^2)}{(1-p^2 \sin^2 B)^{\frac{3}{2}}}; \quad (4)$$

r — радиус кривизны параллели,

$$r = N \cos B; \quad (5)$$

N — радиус кривизны первого вертикала,

$$N = \frac{d_{эл}}{(1-p^2 \sin^2 B)^{\frac{1}{2}}}; \quad (6)$$

$$d_{эл} = \frac{b}{\sqrt{1-k^2 \cos^2 \lambda}}; \quad p^2 = 1 - \left(\frac{c}{d_{эл}}\right)^2; \quad (7)$$

$$z = \frac{k^2 \sin 2\lambda}{2(1-k^2 \cos^2 \lambda)}; \quad k^2 = 1 - (b/a)^2;$$

a, b, c — полуоси трёхосного эллипсоида; $d_{эл}$ — большая полуось эллипса меридианного сечения; B — условно-геодезическая широта.

С учётом формул (2–7), можно записать уравнение для вычисления абсцисс проекции:

$$x = \int \Phi d\xi + F(\lambda) = \int M dB + F(\lambda). \quad (8)$$

Этот интеграл является эллиптическим. Для того чтобы привести его к виду, пригодному для вычислений, необходимо найти его приближенное выражение. С этой целью подынтегральная функция раскладывается в ряд, а затем этот ряд интегрируется почленно [4].

В результате интегрирования (8) вдоль каждого меридиана абсциссы вычисляются как

$$X = s + F(\lambda), \quad (9)$$

где $F(\lambda)$ — функция интегрирования, которая при получении проекций, симметричных относительно экватора, приравнивается к нулю.

В монографии [3] приводятся два результата интегрирования для S — длины дуги меридиана от экватора до данной параллели.

В первом случае S выражается в виде следующего ряда:

$$S = \frac{d_{эл}}{1+n} \left[\left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} + \dots\right) B - \left(\frac{3}{2}n - \frac{3}{16}n^3 - \dots\right) \sin 2B + \left(\frac{15}{16}n^2 - \frac{15}{64}n^4 + \dots\right) \sin 4B - \dots \right], \quad (10)$$

где $n = \frac{d_{эл} - c}{d_{эл} + c}$; $d_{эл}$ — находится из выражения

(7); c — полярная полуось трёхосного эллипсоида.

Во втором случае для отображения поверхностей, аппроксимируемых поверхностью трёхосного эллипсоида с большим полярным сжатием, профессора Л.М. Бугаевский рекомендует использовать ряд известный из формул сфероидической геодезии [4]:

$$S = a_0 B - \frac{a_2}{2} \sin 2B + \frac{a_4}{4} \sin 4B - \frac{a_6}{6} \sin 6B + \frac{a_8}{8} \sin 8B - \dots, \quad (11)$$

где

$$a_0 = m_0 + \frac{m_2}{2} + \frac{3}{8}m_4 + \frac{5}{16}m_6 + \frac{35}{128}m_8 + \dots;$$

$$a_2 = \frac{m_2}{2} + \frac{m_4}{2} + \frac{15}{32}m_6 + \frac{7}{16}m_8 + \dots;$$

$$a_4 = \frac{m_4}{8} + \frac{3}{16}m_6 + \frac{7}{32}m_8 + \dots;$$

$$a_6 = \frac{m_6}{32} + \frac{m_8}{16} + \dots;$$

$$a_8 = \frac{m_8}{128} + \dots$$

$$m_0 = d(1-p^2); \quad m_2 = \frac{3}{2}p^2 m_0;$$

$$m_4 = \frac{5}{4}p^2 m_2; \quad m_6 = \frac{7}{6}p^2 m_4;$$

$$m_8 = \frac{9}{8}p^2 m_6; \quad \dots\dots\dots$$

В результате формулы для абсцисс и ординат проекции записываются в следующем виде: $x = S$; $y = \Phi_0 \lambda$, где Φ_0 определяется по широте параллели B_0 , на которой отсутствуют ис-

кажения длин:

$$\Phi_0 = r_0(1 + z^2 \cos^2 B_0)^{\frac{1}{2}}.$$

Формула (11) была использована для определения радиуса кривизны меридиана на эллипсоиде Красовского в [4], показав высокую точность вычислений. Используя полуоси эллипсоида Красовского, были получены аналогичные результаты и по формуле (10).

Наряду с равноугольной цилиндрической проекцией трёхосного эллипсоида Л.М. Бугаевский рекомендовал также равнопромежуточную вдоль меридианов цилиндрическую проекцию трёхосного эллипсоида для картографирования небесных тел, подобных нерегулярному в своей фигуре, спутнику Марса Фобос. По аналогии с Фобосом было решено рассмотреть возможности по её использованию для картографирования астероида 433 Эрос.

Астероид Эрос характеризуется экстремально вытянутой и, в тоже время, нерегулярной фигурой (рис. 2). Он описывается полуосями трёхосного эллипсоида $a=15000$ м, $b=c=7500$ м (по первоначальным оценкам).

Формулы для определения абсцисс (11) были рекомендованы в [3] для тел с большим полярным сжатием, поэтому они были использованы для построения картографических сеток поверхности астероида 433 Эрос для составного эллипсоида в [5, 6].

С полярным сжатием тесно связаны характеристики эксцентриситетов. Первый полярный и экваториальный эксцентриситеты вычисляются по формулам:

$$e^2 = (a^2 - c^2)/a^2; \quad e_a^2 = (a^2 - b^2)/a^2.$$

Их значения для Фобоса и Эроса составляют соответственно: $e^2=0,5$; $e_a^2 = 0,4$; $e^2=0,75$; $e_a^2 = 0,75$.

В связи с тем, что использование формул (10) и (11) даёт приближённый результат вычисления абсцисс, для проверки результатов и более точного вычисления равнопромежуточных вдоль меридианов проекций трёхосного эллипсоида, получим длины дуг меридианов и экватора проекции с помощью эллиптического интеграла. Для этого была написана специальная программа вычисления определенного интеграла, дополненная подпрограммами вычисления трёх вариантов подынтегральной

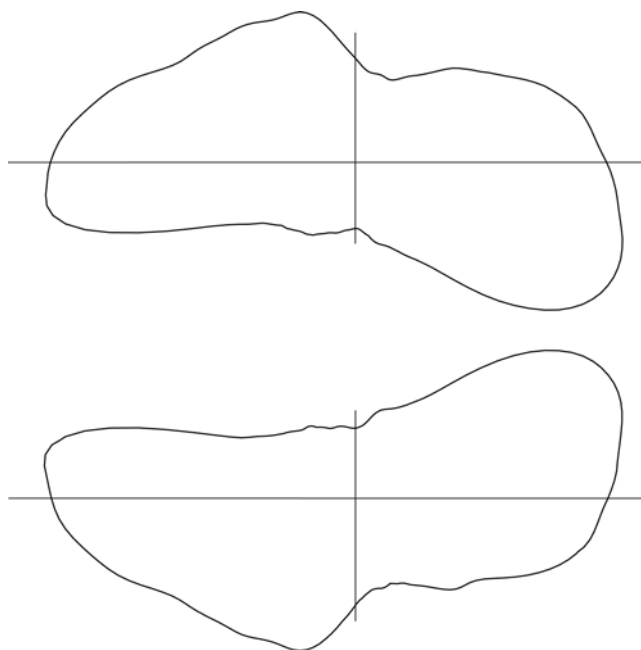


Рис. 2. Силуэты северного и южного полюсов Эроса

функции. Использование этой программы позволяет получать координаты равнопромежуточной вдоль меридианов цилиндрической проекции, сохраняющей длины вдоль экватора. Выбор эллиптического цилиндра соответствует результатам работы [7], в которой убедительно показаны преимущества такого цилиндра перед круговым.

Формула для определения ординат в проекции, соответствующих длине дуги экваториального эллипса

$$S_Y = b \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \frac{\sqrt{1 - (2 - k^2)k^2 \cos^2 \lambda}}{(1 - k^2 \cos^2 \lambda)^{\frac{3}{2}}} d\lambda \quad (12)$$

получается из уравнения эллипса в плоской полярной системе координат ρ , δ и известного соотношения

$$S = \int_{\delta_1}^{\delta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\delta}\right)^2} d\delta,$$

где S — длина произвольной кривой.

В работе [3, с. 35, формулы (88)–(89)] предлагается использовать то же соотношение, но вычисление конкретных значений проводится по приближенным формулам [3, с. 30, формулы (70)–(71)], рассчитанным на малые значения эксцентриситета эллипса. Поэтому приведенные в цитируемой работе результаты вычисления прямоугольных координат на экваторе при

долготе в 90° для картографирования Фобоса [3, с.34] почти совпадают с нашими (отклонение 16 м), а координаты для спутника Юпитера Амальтеи [3, с. 129] из-за значительного экваториального сжатия ($e_a^2 = 0,6$) отличаются от наших довольно сильно (отклонение 41508,4 м).

Программа вычисления интеграла написана на основе квадратурной формулы Гаусса [8, 9] с пятью узлами. Формула Гаусса является частным случаем интеграла от интерполяционного многочлена Лагранжа, со специальным подбором узлов и весовых коэффициентов, позволяющим существенно повысить точность интерполяции, не повышая степени многочлена. Узлы на произвольном отрезке вычисляются из условия сохранения соотношения расстояний между концами отрезка и соответствующими узлами на отрезке $[-1, +1]$, которые являются нулями многочлена Лежандра [8] пятой степени. Значения весов для произвольного отрезка также легко получаются из заранее вычисленных для $[-1, +1]$. Программа реализована на языке программирования JavaScript и представлена на сайте ЦГИ ИГ РАН как часть инструмента, позволяющего вычислять координаты точек пересечения параллелей и меридианов в равнопромежуточных проекциях трёхосного эллипсоида ([10] на русском языке и [11] на английском). При выбранной степени многочлена Лежандра, любая наперед заданная точность вычисления интеграла достигается за счёт дробления отрезка.

Для равнопромежуточной вдоль меридианов цилиндрической проекции трёхосного эллипсоида предлагаются три варианта определения широты, для каждого из которых длина дуги меридиана вычисляется по-своему.

1. B — условно-геодезическая широта, то есть угол между нормалью к эллипсу в плоскости меридианного сечения и линией пересечения этой плоскости с экваториальной плоскостью. Для эллипсоида вращения такая широта совпадает с геодезической широтой. Длина дуги меридиана от экватора до параллели с широтой B_i вычисляется по формуле

$$S_x = \int_0^{B_i} M dB, \quad (13)$$

где M — кривизна меридианного сечения, вычисляемая по формуле (4).

2. φ — геодезическая широта, то есть угол между нормалью к поверхности трёхосного эллипсоида и экваториальной плоскостью. Длина дуги меридиана от экватора до параллели с широтой φ_i вычисляется после замены переменной по формуле

$$S_x = \int_0^{\varphi_i} \frac{d_{эл}(1-p^2)}{[1-p^2 \sin^2 B(\varphi)]^{\frac{3}{2}}} dB d\varphi = \int_0^{\varphi_i} \frac{d_{эл}(1-p^2)\sqrt{1+z^2 \sin^2 \varphi} \sqrt{1+z^2}}{[1-p^2 \sin^2 \varphi + z^2 \sin^2 \varphi(1-p^2)]^{\frac{3}{2}}} d\varphi, \quad (14)$$

где $B(\varphi) = \arcsin \left[\frac{\sin \varphi \sqrt{1+z^2}}{\sqrt{1+z^2 \sin^2 \varphi}} \right]$; z и p^2 вычисляются по формулам (7).

Для контроля при отладке программы длина дуги меридиана от экватора до параллели с широтой φ_i также вычислялась по формуле (13) с заменой верхнего предела интегрирования $B_i = B(\varphi)$. Результаты вычислений полностью совпали.

3. φ — планетоцентрическая широта, то есть угол между радиус-вектором из центра эллипсоида на данную точку поверхности эллипсоида и плоскостью экватора. Длина дуги меридиана от экватора до параллели с широтой φ_i вычисляется по той же формуле, что и длина дуги экватора с заменой b на c , p^2 на k^2 и λ на φ :

$$S_x = c \int_0^{\varphi_i} \frac{\sqrt{1-(2-k^2)k^2 \cos^2 \varphi}}{(1-k^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi. \quad (15)$$

Для контроля длина дуги меридиана от экватора до параллели с широтой φ_i также вычислялась по формуле (13) с заменой верхнего предела интегрирования $B_i = B(\varphi)$. При этом условно-геодезическая широта вычисляется из соотношения:

$$\operatorname{tg} B = \left(\frac{d_{эл}^2}{c^2} \right) \operatorname{tg} \varphi.$$

Таким образом, абсциссы равнопромежуточной вдоль меридианов проекции вычисляются по формулам (13, 14 или 15) в зависимости от способа задания широты на трёхосном эллипсоиде. Ординаты проекции вычисляются по формуле (12).

Разные способы задания широты для ци-

линдрической проекции позволяют провести сравнительный анализ вида параллелей (рис. 3) и сопоставить наши результаты вычислений с приведёнными в работах [3, 5]. Сравнение параллелей интересно в связи с тем, что хотя соответствие точек поверхности трёхосного эллипсоида точкам на плоскости в проекции не зависит от способа задания широты, сами параллели в зависимости от этого представляют собой разные линии на поверхности трёхосного эллипсоида. Причём в отличие от эллипсоида вращения на линии с постоянной, например, планетоцентрической широтой условно-геодезическая широта не постоянна.

На рис. 3 видно, что условно-геодезическая широта совпадает с геодезической на меридиане с долготой 180°. Это является следствием того, что нормаль к поверхности эллипсоида лежит в плоскости меридианного сечения при долготе 0; 90; 180 и 270°.

Практическое значение имеет способ, связанный с планетоцентрической широтой φ , так как данные для планетной картографии, как правило, представлены в системе координат φ, λ . На рис. 4 представлена карта поверхности астероида 433 Эрос в равнопромежуточной

вдоль меридианов цилиндрической проекции трёхосного эллипсоида, в которой параллели построены в соответствии с планетоцентрическими широтами.

Азимутальная проекция вычислялась только для планетоцентрической широты с использованием той же подынтегральной функции, что и для меридиана соответствующей цилиндрической проекции.

$$x = \rho \sin \delta; \quad y = -\rho \cos \delta,$$

$$\text{где } \rho = c \int_{\varphi_i}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1 - (2 - k^2)k^2 \cos^2 \varphi}}{(1 - k^2 \cos^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} d\varphi \text{ и } \delta = \lambda.$$

На рис. 5 представлены карты северного и южного полушарий астероида 433 Эрос в равнопромежуточной вдоль меридианов азимутальной проекции трёхосного эллипсоида.

Сравнение результатов вычислений равнопромежуточной вдоль меридианов цилиндрической проекции трёхосного эллипсоида, приведённых в статье [5], с нашими результатами показало, что формула (241) из работы [3, с. 78] не пригодна для картографирования небесных тел с большим полярным сжатием. Формулы

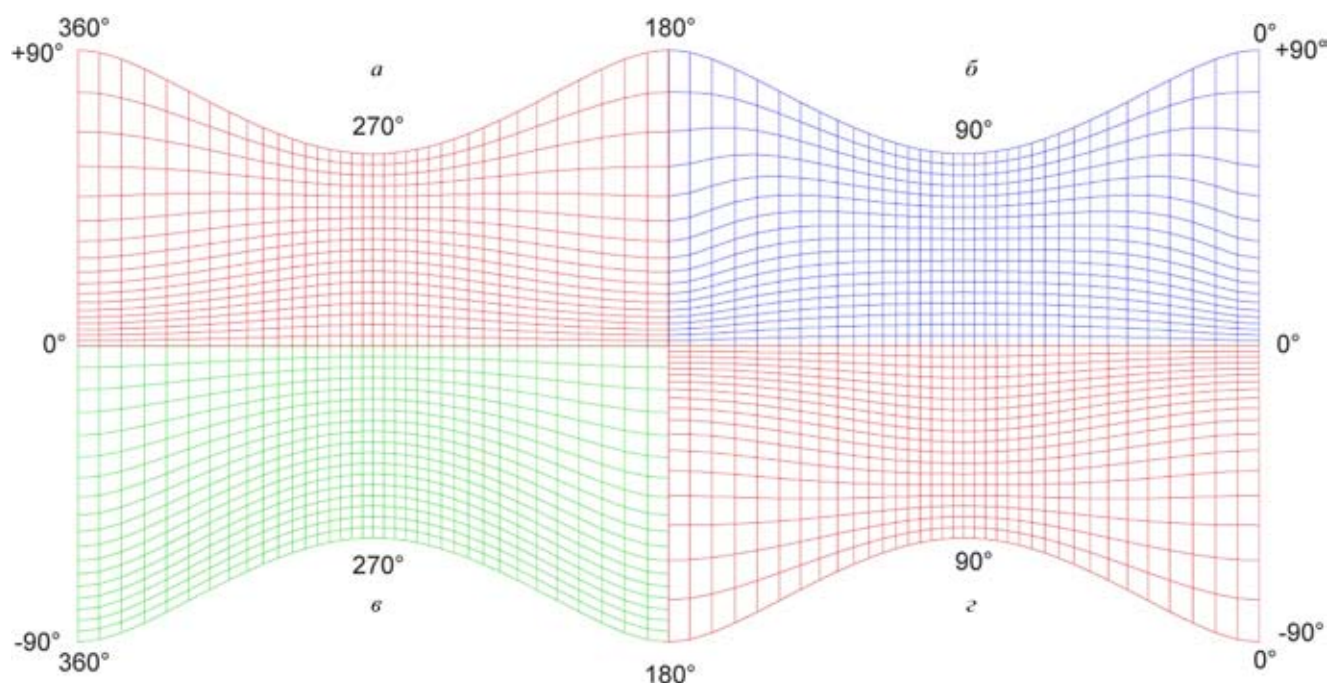


Рис. 3. Вид картографической сетки в равнопромежуточной вдоль меридианов цилиндрической проекции трёхосного эллипсоида:

a, z — абсциссы вычислялись с учётом условно-геодезической широты; *b* — абсциссы вычислялись с учётом геодезической широты; *в* — абсциссы вычислялись с учётом планетоцентрической широты

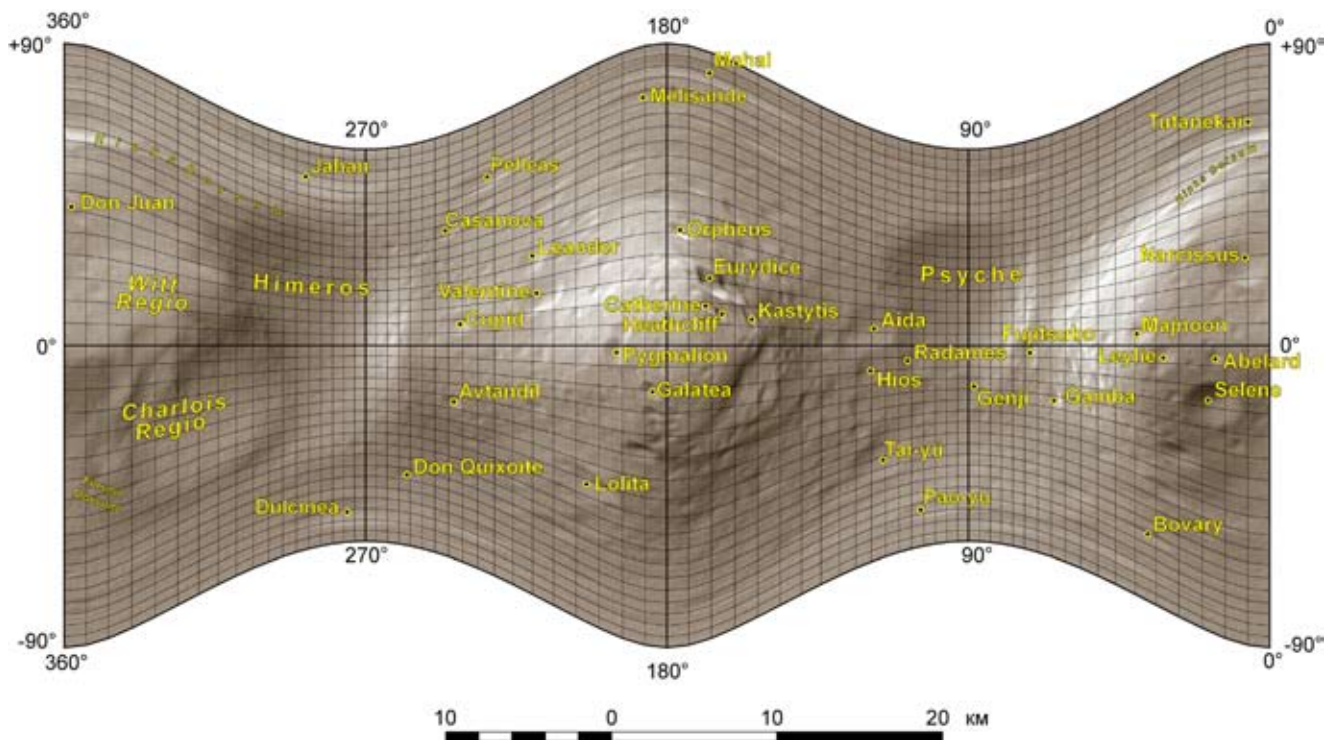


Рис. 4. Карта поверхности астероида 433 Эрос в равнопромежуточной вдоль меридианов цилиндрической проекции трёхосного эллипсоида

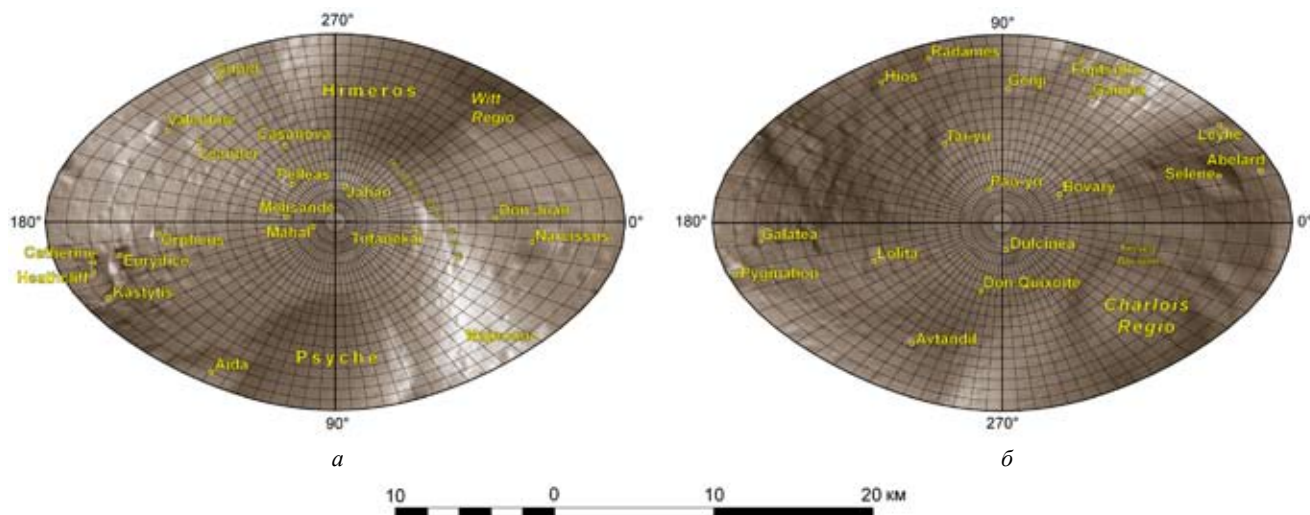


Рис. 5. Северное (а) и южное (б) полушария астероида 433 Эрос в равнопромежуточной вдоль меридианов азимутальной проекции трёхосного эллипсоида

(70), (71) для получения ординат проекций трёхосного эллипсоида, сохраняющих длины вдоль экватора, из работы [3, с. 30] не пригодны для картографирования небесных тел с большим экваториальным сжатием.

В соответствии с [3] мы называем предложенные проекции равнопромежуточными вдоль меридианов, хотя строго говоря, допол-

нительно к свойству сохранения длин вдоль меридианов требуется, чтобы в любой точке экстремальный масштаб длин вдоль меридиана был равен единице. Для уточнения такого дополнительного свойства необходимо отдельное исследование, которое можно проводить, используя методику, предложенную в [7].

Рассмотренный в данной статье математи-

ческий аппарат даёт возможность вычислять равнопромежуточные цилиндрические и азимутальные проекции трёхосного эллипсоида для небесных тел с любыми значениями эксцентриситета. Программа, реализованная на языке программирования JavaScript и представленная на сайте ЦГИ ИГ РАН, позволяет вычислять проекции для любых типов референц-поверхностей — от сферы до составного эллипсоида.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Stooke P.J.* (1986). Automated cartography of non-spherical worlds. Proc. 2nd Internat. Symp. Spatial Data Handling, pp. 523–536.
2. <http://planetmap.ru/atlas/phobos-surface-maps.html>.
3. *Бугаевский Л.М.* Теория картографических проекций регулярных поверхностей. М.: Златоуст, 1999. –144 с.
4. *Морозов В.П.* Курс сфероидической геодезии. М.: Недра, 1979.

5. *Бугаевский Л.М., Нырцов М.В.* Картографирование малых небесных тел с использованием составных эллипсоидов// Изв. вузов «Геодезия и аэрофотосъемка», 2006. –№6. –С. 158–168.

6. *Maxim V. Nyrtsov, Lev M. Bugaevsky, Philip J. Stooke.* The multiple axis ellipsoids as reference surfaces for mapping of small celestial bodies. Proceedings of the 23^d International Cartographic Conference, 4–10 August Moscow 2007, Russia “Cartography for everyone and for you” CD-ROM.

7. *Bilibina N.A., Vereshchaka T.V.* Some peculiarities of generating projections for a triaxial ellipsoid. Proceedings of the 27th International Cartographic Conference 3–8 July Paris 2011, France, CD-ROM.

8. *Никольский С.М.* Квадратурные формулы. М.: Наука, 1988. –256 с.

9. *Калиткин Н.Н.* Численные методы. М.: Наука, 1978. –512 с.

10. http://geocnt.geonet.ru/ru/3_axial.

11. http://geocnt.geonet.ru/en/3_axial.

Поступила 2 ноября 2011 г.

Рекомендована кафедрой географии МИИГАиК